



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DO TOCANTINS  
CAMPUS PALMAS  
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MARLON ANDRADE DE BRITO

**ANÁLISE DA EFICÁCIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS  
ORDINÁRIAS APLICADAS NA EPIDEMIOLOGIA ATRAVÉS DOS  
SISTEMAS SI,SIS e SIR**

PALMAS

2023

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DO TOCANTINS**

MARLON ANDRADE DE BRITO

**ANÁLISE DA EFICÁCIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS  
ORDINÁRIAS APLICADAS NA EPIDEMIOLOGIA ATRAVÉS DOS  
SISTEMAS SI,SIS e SIR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Tocantins – Campus Palmas, como exigência à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza

PALMAS

2023

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins**

---

B862a Brito, Marlon Andrade de  
Análise da eficácia das Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas na  
epidemiologia através dos sistemas SI, SIS e SIR / Marlon Andrade de Brito.  
– Palmas, TO, 2023.  
42 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus  
Palmas, Palmas, TO, 2023.

Orientador: Dr. Wallysonn Alves de Souza

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Epidemiologia. 3. COVID-19. I.  
Souza, Wallysonn Alves de. II. Título.

**CDD 510**

---

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e  
pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a).

## Agradecimentos

- A Deus que foi meu alicerce nos momentos mais difíceis;
- A minha namorada, pela sua ajuda e por sempre acreditar em mim;
- A minha família que me apoiou de sua maneira;
- Ao meu orientador, Professor Dr. Wallysonn Alves de Souza, pelas suas contribuições, paciência e confiança;
- Aos professores do curso de licenciatura em matemática do IFTO, pelas contribuições na minha formação;
- À todos que contribuíram para minha formação profissional e pessoal.

*Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.*

*Nikolai Lobachevsky*

## Resumo

A Matemática está presente nas mais diversas áreas do conhecimento, inclusive nas que competem à saúde, como a epidemiologia. Tendo isso em mente, o presente trabalho busca demonstrar como ocorre a utilização das Equações Diferenciais Ordinárias na área. Além disso, investiga a efetividade das previsões de contágio da COVID-19 realizadas no auge da pandemia através dos modelos SI, SIS e SIR. Para isso, foram percorridos os modelos, realizados apontamentos sobre quais feitos podem interferir em suas variáveis, e então verificado em cada um a possibilidade de aplicação ao vírus SARS-CoV-2. Constatou-se que apenas o modelo SIR, apesar de imperfeito, foi capaz de se aproximar da realidade. Sendo assim, foi feita uma simulação no software matemático Octave dos acontecimentos da pandemia em nível nacional.

**Palavras-chave:** Matemática; Equações Diferenciais Ordinárias; Epidemiologia; COVID-19; SI; SIS; SIR.

## Abstract

Mathematics is present in the most diverse areas of knowledge, including those related to health, such as epidemiology. In view of this, this work seeks to demonstrate how Ordinary Differential Equations are used in the area. Furthermore, it investigates the effectiveness of COVID-19 contagion predictions made at the height of the pandemic using the SI, SIS and SIR models. To this end, the models were discussed, notes were made about which factors could interfere with their variables, and then the possibility of application to the SARS-CoV-2 virus was verified in each one. It was found that only the SIR model, despite being imperfect, was able to come close to reality. Therefore, a simulation was carried out using Octave mathematical software of the events of the pandemic at a national level.

**Keywords:**Mathematics; Epidemiology;Ordinary Differential Equations; COVID-19; SI; SIS; SIR.

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxograma do modelo SI . . . . .	22
Figura 2 – Fluxograma do modelo SIS . . . . .	25
Figura 3 – Fluxograma do modelo SIR . . . . .	27
Figura 4 – Simulação do modelo SIR . . . . .	32
Figura 5 – Número de Infectados no Brasil . . . . .	33
Figura 6 – Número de óbitos no Brasil . . . . .	34



## Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados da COVID-19 para simulação do modelo SIR . . . . .	31
---------------------------------------------------------------------	----

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>MÉTODO</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS PRELIMINARES: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	<b>14</b>
<b>3.1</b>	<b>Classificação das Equações Diferenciais</b>	<b>14</b>
3.1.1	Classificação quanto ao tipo	14
3.1.2	Classificação quanto a ordem	15
3.1.3	Classificação quanto a linearidade	15
<b>3.2</b>	<b>Soluções das Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>15</b>
3.2.1	Solução explícita	15
3.2.2	Solução implícita	15
3.2.3	Solução analítica e numérica	16
<b>3.3</b>	<b>Problema de Valor Inicial</b>	<b>16</b>
3.3.1	PVI de Primeira e Segunda Ordem	16
<b>4</b>	<b>EPIDEMIOLOGIA</b>	<b>18</b>
<b>4.1</b>	<b>Breve contexto histórico</b>	<b>18</b>
<b>4.2</b>	<b>Epidemiologia Matemática</b>	<b>19</b>
<b>4.3</b>	<b>Modelo SI</b>	<b>20</b>
4.3.1	Análise de Variáveis	23
4.3.1.1	Suscetíveis $S$	23
4.3.1.2	Taxa de propagação $\alpha$	23
4.3.2	Considerações	23
<b>4.4</b>	<b>Modelo SIS</b>	<b>24</b>
4.4.1	Análise de Variáveis	25
4.4.1.1	Taxa de propagação $\beta$	25
4.4.1.2	Taxa de recuperação $\gamma$	25
4.4.1.3	Considerações	25
<b>4.5</b>	<b>Modelo SIR</b>	<b>26</b>
4.5.1	Análise de Variáveis	29
4.5.1.1	Suscetíveis $S$	29
4.5.1.2	Infectados $I$	29
4.5.1.3	Recuperados $R$	29
4.5.1.4	Taxa de propagação $\beta$	30
4.5.1.5	Taxa de recuperação $\gamma$	30

4.5.2	Aplicação do modelo . . . . .	30
4.5.3	Considerações . . . . .	34
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>36</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>37</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>39</b>
	<b>APÊNDICE A – ALGORITMO OCTAVE UTILIZADO NA MODE- LAGEM SIR . . . . .</b>	<b>40</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Em dezembro de 2019, um grande número de casos de pneumonia foi identificado na China. Prontamente, a Organização Mundial de Saúde (OMS) foi notificada e, após análises, foi identificado um novo vírus, o SARS-CoV-2, que veio a ser o causador da pandemia de COVID-19. Com uma mobilização mundial de cientistas em busca de combater a doença, um dos campos que mais ganhou destaque foi o da epidemiologia matemática.

Sendo responsável por analisar a dinâmica de propagação de doenças infecciosas, este campo utiliza modelos matemáticos baseados em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) para analisar a disseminação, bem como auxiliar no combate, realizando comparações de resultados teóricos e reais, como as medidas de contenção e previsões de contágio. Neste contexto, existem diversos modelos matemáticos empregados na área, porém, podem ser reduzidos a três principais, sendo eles: SI (Suscetível-Infectado), SIS (Suscetível-Infectado-Suscetível) e o SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado), onde cada modelo pode ser utilizado em um contexto diferente. No entanto, para a modelagem ser realizada com exatidão, ressalta-se que os aspectos biológicos em questão devem ser compreendidos (KERMACK; MCKENDRICK, 1932).

Nos últimos anos, devido a pandemia, a utilização de modelos matemáticos nas projeções de propagações de doenças tem sido amplamente estudados, porém no país este já é um tema com grandes obras na área. Tendo como exemplo Luiz (2012) que em seu estudo expôs uma variação do modelo epidemiológico SIR para o estudo da gripe Influenza A H1N1.

Nessa conjuntura, o presente trabalho, por meio da aplicabilidade de EDO's na epidemiologia, tem como alvo responder às seguintes perguntas: Os modelos são precisos para o uso na pandemia do COVID-19? Além disso, corroboram a eficácia do isolamento social e da vacinação como medidas efetivas no combate ao vírus?

Assim, este trabalho visa, em um âmbito geral, realizar uma análise crítica e aprofundada desses modelos epidemiológicos, examinando sua eficácia na previsão do contágio da COVID-19, com a finalidade de avaliar a pertinência e o êxito das medidas de controle implementadas durante o auge da crise sanitária.

Especificamente, este trabalho busca demonstrar como ocorre a aplicabilidade das Equações Diferenciais Ordinárias, verificar a efetividade dos modelos SI, SIS e SIR na aplicação da pandemia de COVID-19 e ainda se auxiliam no entendimento da efetividade das medidas de controle. Ao fazê-lo, busca-se não apenas compreender o passado recente, mas também extrair lições valiosas para embasar estratégias futuras de enfrentamento de crises sanitárias.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, apresenta-se a metodologia empregada, indicando as bases de dados utilizadas e o passo a passo da pesquisa. No capítulo 3 discutirá sobre as Equações Diferenciais, considerando sua definição, classificação, tipos de soluções e problemas de valores iniciais. O capítulo 4 Abordará a epidemiologia, apontando além de sua história, os principais modelos matemáticos utilizados na área. Será investigado o papel das variáveis nos modelos de previsões, destacando quais medidas são efetivas para conter a disseminação do contágio. Em cada modelo, será investigada a possibilidade de aplicação no combate à pandemia do COVID-19. Nos casos afirmativos, será detalhada uma aplicação prática por meio de algoritmos utilizando o software Octave. Por fim, no Capítulo 5, tecemos nossas considerações finais.

## 2 MÉTODO

O seguinte trabalho será de natureza básica, utilizando abordagens quantitativas e qualitativas para a interpretação dos dados. Sua especificação quanto aos objetivos será descritiva e exploratória, tendo em vista que segundo Gil (2002), permite uma confinidade com a questão.

Nesse sentido, a metodologia envolveu o levantamento bibliográfico nas bases de dados da SciELO, Periódicos Capes e do Google, buscando informações sobre COVID-19, Equações Diferenciais Ordinárias e modelos matemáticos empregados na epidemiologia. Através desses recursos, foram detalhadas as aplicações das EDO's no campo epidemiológico.

Em seguida, foram investigados os dados referentes ao número de casos confirmados disponibilizados nos informativos de saúde do Ministério da Saúde e reportados pelos consórcios de imprensa. Esses dados foram usados para comparação com os valores previstos encontrados na aplicação dos modelos.

Essas fontes bibliográficas não apenas embasaram as considerações teóricas, mas também forneceram valores de variáveis reais para serem inseridos nos modelos durante a aplicação. Esse processo de análise abrangeu o período de 28 de abril de 2020 até 28 de fevereiro de 2022 em todo o país.

Após o levantamento das variáveis, foi desenvolvido um algoritmo utilizando o Octave para plotar gráficos, permitindo a comparação entre a previsão do modelo e os eventos reais. Essa comparação permitiu avaliar a eficácia das medidas de controle implementadas no país.

### 3 RESULTADOS PRELIMINARES: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação que possui como variáveis independentes as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções é chamada de equação diferencial, sendo que podem ser classificadas em tipo, ordem e linearidade (ZILL, 2016, p.2).

As equações diferenciais foram introduzidas no cálculo durante o século XVII por grandes nomes como Gottfried Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1642-1727) e Pierre de Fermat (1607-1667). As Equações Diferenciais são de grande complexidade, sendo que apesar da possibilidade de obter algumas de suas soluções através do teorema fundamental do cálculo e da integração, restringia-se a situações específicas, quando suas variáveis estavam separadas. Foi somente com o método de separação de variáveis desenvolvido por Jakob Bernoulli (1654-1705) e posteriormente generalizado por Leibniz que foi fixada uma técnica de solução. Entretanto, foi somente com Leonhard Euler (1707-1783) que ao utilizar a ideia de fator integrante formou o método utilizado atualmente para resolução de equações diferenciais homogêneas ou não homogêneas (EVES, 2011, p.473).

Com o passar dos anos, a comunidade acadêmica percebeu que encontrar uma solução explícita geral para equações diferenciais era uma tarefa impossível. Isso impulsionou os pesquisadores matemáticos a buscar métodos de estudo das equações diferenciais que não se limitassem apenas às soluções explícitas. Assim, novas técnicas foram exploradas e seus resultados começaram a surgir apenas no final do século XIX, com o desenvolvimento da teoria qualitativa geométrica, da teoria de aproximação analítica e da aproximação numérica (CHINCHIO, 2012).

#### 3.1 Classificação das Equações Diferenciais

##### 3.1.1 Classificação quanto ao tipo

Quanto ao seu tipo, as equações diferenciais podem ser classificadas em 2 (dois), sendo que as que possuem a função incógnita dependente de apenas uma única variável é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO), caso a função incógnita dependa de duas ou mais variáveis será chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP)(ZILL, 2016, p.2). Como o foco deste trabalho é a aplicação na epidemiologia matemática, as investigações ocorrerão com as EDO's, e portanto não mais serão tratados os casos das EDP's.

### 3.1.2 Classificação quanto a ordem

A ordem de uma equação diferencial, será a mesma que a ordem da maior derivada na equação. Ou seja, uma EDO será de primeira ordem se nela conter até a derivada de primeira ordem, será chamada de ordem  $n$  quando tiver até a  $n$ -ésima derivada (FILHOS, 2007, p.323).

### 3.1.3 Classificação quanto a linearidade

Quanto à linearidade, para que uma EDO de ordem  $n$  seja linear, ela deve ter a possibilidade de ser escrita como:

$$a_n(x)y_n^n + a_{n-1}(x)y_{n-1}^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (3.1)$$

onde  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  e  $g(x)$  são funções que dependem apenas de  $x$  (AZEVEDO, 2021). Caso não possa ser escrita desta forma, é classificada como uma EDO não-linear.

## 3.2 Soluções das Equações Diferenciais Ordinárias

As soluções de uma equação diferencial podem ser definidas como uma função definida em um intervalo  $I$  que tem pelo menos  $n$  derivadas contínuas em  $I$ , e que quando são substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  reduzem esta equação a uma identidade (ZILL, 2016, p.4), ou seja, a solução de uma EDO é uma função que torna a relação entre a função desconhecida e suas derivadas verdadeira. Por conveniência, as soluções terão como simbologia  $y(x)$ , podendo ser classificadas em implícita e explícita ou ainda em analíticas e numéricas.

### 3.2.1 Solução explícita

A solução em que a variável dependente esteja escrita apenas em função da variável independente, é considerada como solução explícita. Por exemplo, a função  $y = xe^x$  é uma solução explícita da EDO:  $y'' - 2y' + y = 0$

### 3.2.2 Solução implícita

Já a solução implícita é a relação  $G(x, y) = 0$  definida em um intervalo  $I$ , quando existe pelo menos uma função que satisfaça a relação, bem como a equação diferencial em  $I$  (ZILL, 2016, p.6). Ou seja, é aquela solução em que definido um intervalo, a variável dependente não é escrita apenas em função da variável independente, mas sim dado por uma relação entre elas.

Por exemplo, seja  $-2 < x < 2$ , a relação  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  é uma solução implícita da EDO  $y' = \frac{-x}{y}$ .



### 3.2.3 Solução analítica e numérica

Ao se resolver uma EDO, é comum encontrar uma família de soluções definidas por meio de uma solução geral com constantes arbitrárias  $C$ , estas são as chamadas soluções analíticas, ou seja, se a solução puder ser expressa por meios matemáticos comuns como funções, exponenciais, polinômios esta será analítica, assim os exemplos de soluções implícitas e explícitas enquadram-se como uma solução analíticas.

Alguns exemplos de técnicas de solução são: as variáveis separáveis, soluções por substituições, equações lineares, e equações exatas.

No entanto, nem todas equações possuem resoluções analíticas, mas praticamente toda EDO pode ter sua solução encontrada através de métodos numéricos, possuindo assim uma solução numérica. Estas são obtidas através da definição de valores prévios para a variável independente, porém caso as condições iniciais sejam alteradas, então toda a tabela deve ser reelaborada. Exemplos de soluções numéricas são: Método de Euler e Método de Runge-Kutta (Segunda e Quarta ordem) (FILHOS, 2007, p.324).

A obtenção da solução numérica não se dá na forma de uma expressão, mas sim por meio de uma tabela de valores ou de um conjunto de pontos aproximados. Quando há necessidade de visualização geométrica, é viável criar uma representação gráfica utilizando uma função que interpole esses pontos, proporcionando uma forma visual do resultado.

## 3.3 Problema de Valor Inicial

Durante a resolução de uma EDO é comum partir de condições prescritas, condições que são relativas a função incógnita e suas derivadas. Neste cenário surge o Problema de Valor Inicial (PVI) que segundo Zill (2016) é definido dado o problema:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad (3.2)$$

Sendo que  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ , onde  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  são constantes reais especificadas. Assim, os valores de  $y(x)$  e as  $n - 1$  derivadas em um único ponto  $x_0$  são denominadas condições iniciais.

### 3.3.1 PVI de Primeira e Segunda Ordem

Para exemplificar, o PVI de primeira e segunda ordem podem ser dados por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.3)$$

em que  $y(x_0) = y_0$  e

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad (3.4)$$

sendo que  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ .

Na equação (3.3) temos como objetivo encontrar uma solução da equação diferencial  $y' = f(x, y)$  em um intervalo  $I$  contendo  $x_0$  de modo que uma curva integral passe pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . Enquanto que em (3.4) buscamos uma solução em que seu gráfico não somente passe pelo ponto  $(x_0, y_0)$ , mas que apresente, também, sua inclinação no ponto como sendo  $y_1$ .

## 4 EPIDEMIOLOGIA

Para Lima (2018), a epidemiologia é uma área integrada à medicina que estuda os fatores que influenciam a difusão e propagação de doenças, investigando sua incidência, padrões de distribuição, desenvolvimento e implementação de medidas essenciais para a prevenção.

Conforme Mathias (2014), adotando um ponto de vista prático, o principal objetivo da epidemiologia é oferecer informações que embasem uma tomada de decisão lógica para controlar e/ou prevenir uma doença em uma determinada população.

### 4.1 Breve contexto histórico

Mathias (2014) aponta que na antiga Grécia, Hipócrates observou como a enfermidade pode estar ligada ao ambiente. Ele conseguiu chegar a conclusões sobre como o meio interfere na saúde humana. Ao longo das eras, essas foram as maiores observações realizadas. Foi em 1662 que John Graunt acrescentou importantes conceitos, como a estimativa de população, ao examinar os registros semanais de óbitos e os dados de batismos em Londres. Ele observou uma maior incidência de óbitos entre os homens, altas taxas de mortalidade entre os bebês, flutuações sazonais nos índices de mortalidade e diversas outras particularidades.

Apontado por Luiz (2012), um dos primeiros estudos na área ocorreu em 1790 por Daniel Bernoulli, que apresentou um dos primeiros estudos documentados sobre epidemiologia, investigando a disseminação da varíola. Esse marco histórico impulsionou pesquisas mais aprofundadas no campo da medicina, possibilitando uma análise mais detalhada de diversas questões relacionadas às doenças.

Mathias (2014) afirma que a disciplina conhecida como epidemiologia é relativamente recente. O termo 'epidemiologia' foi utilizado pela primeira vez em uma pesquisa sobre pragas na Espanha durante o século XVI, realizada pelo médico espanhol Angelario. Após esse momento, o termo é encontrado na literatura por volta de 1802, como título de pesquisa sobre as enfermidades e epidemias que afetaram a Espanha.

Em sua obra Snow (1855), autor considerado o pai da epidemiologia, através da hipótese de contágio explicou a ocorrência da cólera, fato que ocorreu antes da teoria microbiana, ou seja, antes mesmo da solidificação do conhecimento de micro organismos o autor chegou a identificar uma bomba d'água na rua Broad Street como o foco da infecção.

Após décadas de estudo e contribuições de diversos autores, a epidemiologia obteve um impulso significativo na década de 60 com a computação eletrônica. Isso se

deu devido à possibilidade de armazenamento de informações sobre as doenças e seus causadores através da criação de uma base de dados. (FARIAS, 2018).

## 4.2 Epidemiologia Matemática

Segundo Luiz (2012), a modelagem matemática é um recurso que apoia a compreensão da realidade ao converter situações concretas em representações matemáticas. Esses modelos, após análise, produzem resultados interpretáveis que refletem a realidade.

Na Epidemiologia, a modelagem matemática envolve a investigação de equações que representam a dinâmica entre a população e o ambiente, permitindo uma análise minuciosa sobre a doença (LUIZ, 2012).

Os chamados modelos compartimentais que aqui serão estudados, possuem este nome pois a população é dividida em compartimentos (ou classes), que apontam o estágio do indivíduo, sendo considerado as seguintes classes:

- Imunidade Passiva (M): indivíduos que nasceram imunes, pois receberam anticorpos da mãe na gestação;
- Transmissão Vertical (T): indivíduos que já nasceram com a doença, adquirindo-a através da mãe infectada durante a gestação;
- Suscetíveis (S): indivíduos sadios que são passíveis de contrair a doença;
- Infectados (I): indivíduos que contraíram a doença e podem transmiti-la aos indivíduos suscetíveis por transmissão direta;
- Portadores (P): indivíduos infectados pela doença que estão em período latente, ou seja, aqueles que foram infectados, mas ainda não são capazes de transmitir a doença;
- Removidos (R): indivíduos anteriormente infectados, mas que deixam de ser portadores da doença, por motivos de isolamento, cura ou morte (LUIZ, 2012).

Em todos os estágios serão considerados as infecções de pessoa para pessoa. Neste trabalho estão sendo analisados os modelos em sua forma básica, portanto decorre que todos estão sujeitos aos seguintes:

- O tamanho da população permanece constante em relação ao tempo;
- Todos os seres nascem com suscetibilidade;
- Os suscetíveis se contaminam ao entrar em contato com indivíduos contaminados;
- Todos os membros que contraírem a doença tornam-se transmissores.

- As interações entre os componentes se dão de forma homogênea;
- Não são considerados emigrações ou imigrações;
- Na população, não há eliminação de membros, seja por morte ou isolamento, nenhum fator resulta na saída de indivíduos.

### 4.3 Modelo SI

Sendo o modelo compartimental mais simples, este de acordo com Anderson e May (1992), como a sigla sugere, considera que o indivíduo após infectado jamais será recuperado da doença, sendo um exemplo de infecção destas condições o vírus HIV.

Assim, por este modelo a epidemia só acaba quando todos forem infectados, portanto, por não ser possível a recuperação este não é um modelo devidamente aplicado a COVID-19 (AZEVEDO, 2021).

Neste modelo, um indivíduo infectado é introduzido em uma população totalmente suscetível, pressupondo-se que, ao ser introduzido, o infectado entra em contato com todos os outros indivíduos da mesma maneira que eles têm contato entre si.

Considerando os pontos da lista presente na seção 4.2, decorre que se tem uma população constante  $N$  em função do tempo  $t$ , onde:

$$N = S(t) + I(t) \quad (4.1)$$

onde  $S(t)$  é o número dos suscetíveis na população e  $I(t)$  representa o número de infectados.

Assumindo  $N(t) = 1$  com  $t > 0$ , tem-se:

$$S(t) = 1 - I(t) \quad (4.2)$$

Para prosseguir no estudo do modelo, consideraremos como Lima (2018) que o número de contatos entre as subpopulações se dá pelo produto  $SI$ .

Consideraremos ainda que existe uma taxa de variação dos suscetíveis  $S$  em função do tempo  $t$  determinado por  $\alpha > 0$ , este é denominado taxa de propagação da doença, sendo proporcional ao número de contatos entre as subpopulações. Portanto o modelo é dado pelo PVI (RODRIGUES, 2021):

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI \quad (4.3)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI \quad (4.4)$$

Considerando:

$$I(0) = I_0$$

Substituindo a equação (4.2) em (4.3) obtemos:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I(1 - I)$$

Através da resolução por separação de variáveis:

$$\int \frac{dI}{I(N - I)} = \alpha \int dt \quad (4.5)$$

Note que o lado esquerdo é resolvido por frações parciais, utilizando do método onde os fatores dos denominadores são lineares e distintos, então

$$\int \frac{dI}{I(N - I)} = \int \frac{A}{I} dI + \int \frac{B}{N - I} dI$$

assim,

$$\frac{1}{I(N - I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{N - I}$$

Colocando todos com o mesmo denominador, teremos:

$$\frac{1}{I(N - I)} = \frac{A(N - I)}{I(N - I)} + \frac{IB}{I(N - I)}$$

Eliminando os denominadores temos:

$$1 = A(N - I) + IB$$

$$1 = AN - AI + IB$$

$$1 = AN + (B - A)I$$

Assim igualando os coeficientes segue que:

$$\begin{cases} NA & = & 1 \\ B - A & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que  $A = B = \frac{1}{N}$ . Decorre que:

$$\int \frac{dI}{I(N - I)} = \frac{1}{N} \int \frac{dI}{I} + \frac{1}{N} \int \frac{dI}{N - I}$$

$$\int \frac{dI}{I(N - I)} = \frac{1}{N} \ln I - \frac{1}{N} \ln(N - I) + c$$

Utilizando em (4.5) temos:

$$\ln I - \ln(N - I) = N\alpha t + c_1$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{I}{N-I}\right) &= N\alpha t + c_1 \\ \frac{I}{N-I} &= e^{N\alpha t + c_1} \\ \frac{I}{N-I} &= Ce^{N\alpha t} \\ I &= Ce^{N\alpha t}(N-I) \\ I + ICe^{N\alpha t} &= NCe^{N\alpha t} \\ I(1 + Ce^{N\alpha t}) &= NCe^{N\alpha t} \end{aligned}$$

Chegando na solução geral:

$$I(t) = \frac{NC}{C + e^{-N\alpha t}} \quad (4.6)$$

aplicando a condição inicial de  $I = I_0$  com  $t = 0$  temos:

$$I_0 = \frac{NC}{C + 1}$$

logo,

$$C = \frac{I_0}{N - I_0}$$

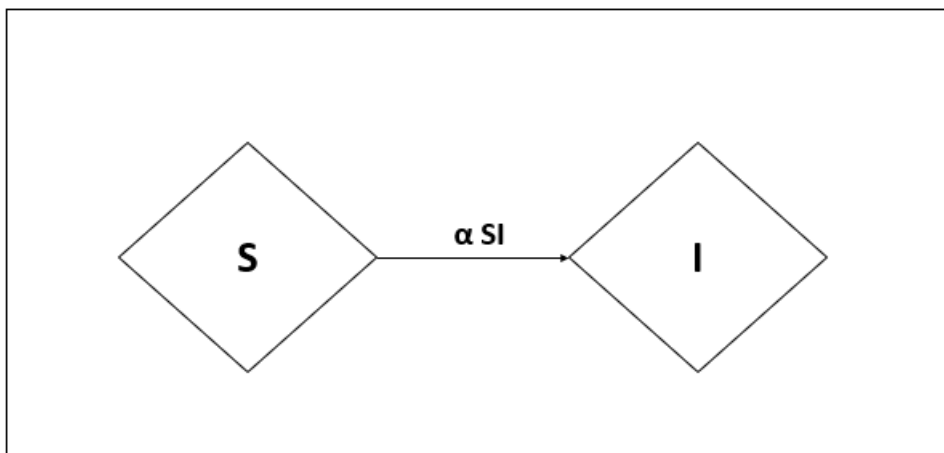
Substituindo o valor de  $C$  na equação (4.6) teremos:

$$I(t) = \frac{NI_0}{I_0 + (N - I_0)e^{N\alpha t}}$$

que representa a variação da população de membros infectados.

Utilizando destas informações, a relação entre as subpopulações pode ser visualizada como:

Figura 1 – Fluxograma do modelo SI



Fonte: Autoria própria

Observemos que caso  $I = 0$ , ou seja, caso não tenha uma pessoa infectada, a equação (4.3) será nula, o que acarreta que nenhuma pessoa muda do grupo suscetível.

### 4.3.1 Análise de Variáveis

Neste tópico, analisaremos as variantes do modelo ao que diz respeito a medidas de interferência tendo como fim a mitigação de uma epidemia.

Devido às características das variáveis e seu comportamento matemático citadas na seção, torna-se possível apontar quais medidas serão efetivas.

#### 4.3.1.1 Suscetíveis $S$

De acordo com a equação (4.4), definida com um  $\alpha$  negativo, essa condição considera o grupo no qual as pessoas são retiradas. Quanto maior for a população inicial, na qual todos são suscetíveis no início da infecção, maior será o aumento no número de infectados.

Assim, a quantidade de indivíduos suscetíveis é crucial no modelo SI, sendo que reduzir o número de suscetíveis por meio de estratégias de identificação precoce de indivíduos infectados pode diminuir o potencial de propagação da doença.

#### 4.3.1.2 Taxa de propagação $\alpha$

Essa variável representa a taxa na qual os indivíduos suscetíveis são infectados quando entram em contato com a população infectada.

Para reduzir a propagação da doença, devemos limitar seus meios de transmissão reduzindo a probabilidade de infecção em cada contato entre suscetíveis e infectados.

Analisando a (4.3) temos que a proporcionalidade da taxa é um fator predominante para o aumento de casos, ou seja, para que não se tenha um surto da doença, a taxa deve ser a menor possível.

### 4.3.2 Considerações

No escopo do modelo SI, não existem feitos a serem realizados com os infectados a fim de acabar com a epidemia, pois suas limitações impedem a investigação devido o fator de não considerar o ganho da imunidade após recuperação (ANDERSON; MAY, 1992).

Assim, o modelo SI não pode ser utilizado para investigar a COVID-19 tendo em vista que se afasta grandemente da realidade da infecção, portanto trata-se de um modelo ineficaz para uso na pandemia do vírus SaRS-CoV-2.



## 4.4 Modelo SIS

Na modelagem SIS, Lopez-Flores et al. (2021) relata que este deve ser utilizado para infecções nas quais um indivíduo suscetível pode adquirir a doença de alguém infectado, assim o até então suscetível se torna infectado e permanece assim até se recuperar. Após a recuperação, o indivíduo infectado volta a ser suscetível, uma vez que não há imunidade adquirida neste modelo. É ideal para infecções como dengue, gripe ou malária.

A população constante neste modelo é dada por:

$$N(t) = S(t) + I(t) \quad (4.7)$$

onde onde  $S(t)$  representa o número de suscetíveis,  $I(t)$  o número de infectados.

Em concordância com Lopez-Flores et al. (2021) Para avançarmos no modelo, vamos considerar:

- A taxa de infecção  $\beta$  como a taxa de novas infecções quando todas as pessoas contatadas são suscetíveis, ou seja, representa o número de novas infecções diárias causadas por cada indivíduo infectado quando toda a população é suscetível.
- A taxa de recuperação  $\gamma$  como a taxa de transição do estado de infectado para o estado de recuperado, ela pode ser considerado o inverso do período de transmissão de um infectado, por exemplo, supondo que o indivíduo infectado transmita a doença por 8 dias, então  $\gamma = \frac{1}{8}$ .

Podemos descrever o modelo como:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \quad (4.8)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (4.9)$$

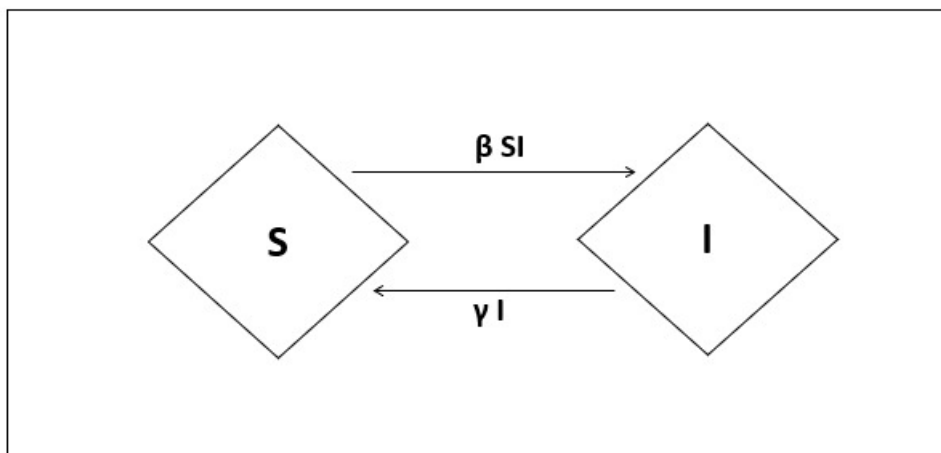
com  $\beta > 0$  e  $\gamma > 0$ .

Em (4.8) temos  $\beta$  como a taxa de variação da subpopulação  $S$  em função do tempo  $t$  e  $\gamma$  a taxa de variação de  $I$  em função do tempo  $t$ . É explicado que a redução dos suscetíveis acontece proporcionalmente ao número de encontros com os indivíduos infectados, indicado pelo negativo  $\beta SI$ , ao passo que há um aumento nos suscetíveis que antes estavam infectados indicado por  $\gamma I$ .

Analogamente ocorre em (4.9), onde o positivo  $\beta SI$  indica a entrada dos indivíduos suscetíveis agora como infectados, e o negativo  $\gamma I$  como a saída dos infectados agora recuperados para o grupo dos suscetíveis.

Tendo estas informações, visando tornar visível a relação matemática entre os grupos, temos o fluxograma capaz de descrever o modelo:

Figura 2 – Fluxograma do modelo SIS



Fonte: Autoria própria

Assim, não se tem o desenvolvimento de imunidade neste modelo.

#### 4.4.1 Análise de Variáveis

Neste contexto, as variáveis que podem ser alvo de intervenção para prevenir ou reduzir uma epidemia dentro do escopo do modelo são:

##### 4.4.1.1 Taxa de propagação $\beta$

Esta variável representa a taxa na qual os indivíduos suscetíveis se tornam infectados quando estão em contato com os infectados. Reduzir a taxa de transmissão é uma estratégia-chave para controlar a disseminação da doença. O modo de interferir nesta variável seria através de medidas que podem ajudar a diminuir a probabilidade de infecção em cada interação entre indivíduos suscetíveis e infectados (ABREU, 2020).

##### 4.4.1.2 Taxa de recuperação $\gamma$

Essa variável representa a velocidade com que os indivíduos infectados se recuperam, neste modelo, tornando-se suscetíveis novamente. Aumentar essa taxa é crucial para reduzir o período de infecção. Tratamentos médicos eficazes, cuidados de saúde adequados e medidas que acelerem a recuperação podem encurtar a duração da infecção, diminuindo a disseminação da doença (ABREU, 2020).

##### 4.4.1.3 Considerações

No modelo SIS, não existem modos de interferir diretamente nas variáveis de suscetíveis e infectados. Como o modelo estabelece um ciclo de contaminação: Suscetível,

contaminado, suscetibilidade com perda de imunidade e novamente a contaminação, não existe espaço para uma recuperação.

Assim, o modelo SIS se faz ineficaz no tratamento da COVID-19, pois torna-se impossível considerar vacinações e ganhos de imunidade neste modelo, portanto não mais será tratado no escopo deste trabalho.

## 4.5 Modelo SIR

Sendo um dos primeiros modelos matemáticos epidemiológicos, o modelo SIR (Suscetível-Infetado-Recuperado) foi formulado por Kermack e McKendrick em 1927 (LUIZ, 2012).

Neste modelo os indivíduos suscetíveis que contraem a doença, ficam infectados e, ao se recuperarem, adquirem imunidade. Aqui, não se contemplam períodos de latência (momento em que o indivíduo contrai a doença, porém ainda não manifesta sintomas) ou isolamentos.

Em casos de doenças fatais como a COVID-19, o modelo ainda pode ser usado, tendo os óbitos contabilizados na classe  $R$ , que pode ser renomeada de recuperados para removidos (LOPEZ-FLORES et al., 2021).

Consoante com Farias (2018) existem pontos a serem considerados sobre o modelo:

Em função dos pontos citados na seção 4.2, tem-se uma população constante  $N$  em função do tempo  $t$ , onde:

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (4.10)$$

onde  $S(t)$  representa o número de suscetíveis,  $I(t)$  o número de infectados e  $R(t)$  o número de removidos.

Assim, o modelo é descrito pelo seguinte sistema:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (4.11)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (4.12)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (4.13)$$

com  $\beta > 0$  e  $\gamma > 0$ .

Em (4.11) temos a EDO que apresenta uma taxa de variação de  $S$  em relação ao tempo  $t$ , determinada pela taxa de infecção  $\beta$ , onde um indivíduo do grupo  $S$  é infectado

e portanto transita para o grupo  $I$ . O sinal negativo indica que os suscetíveis diminuem à medida que a epidemia avança, tendo em vista que as pessoas são infectadas, resultando na redução do grupo  $S$ .

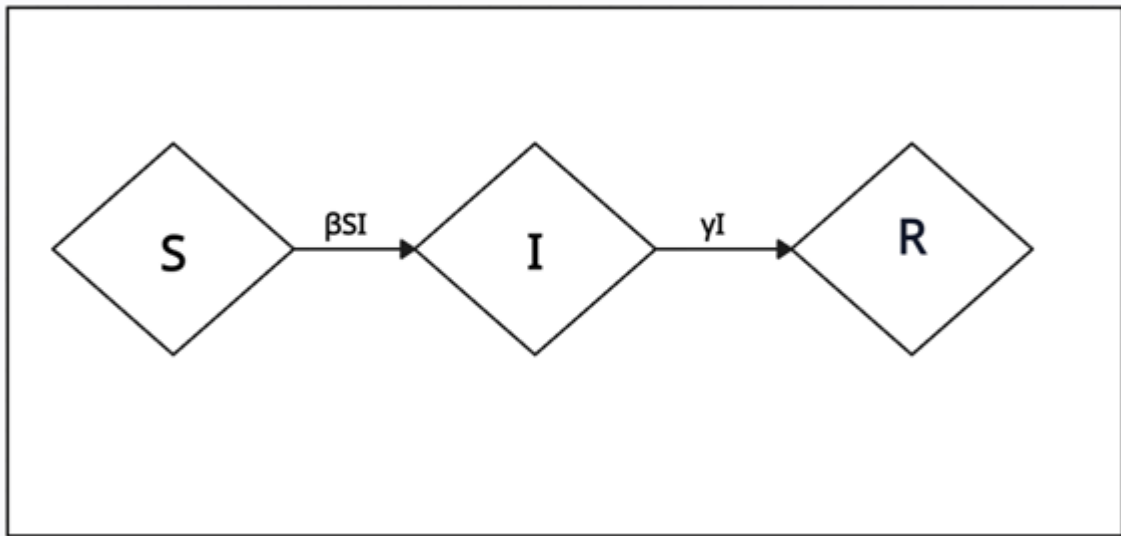
Já a equação (4.12) fornece uma taxa de variação de  $I$  em relação ao tempo  $t$ , determinado por  $\beta SI$  positivo, visto que essa taxa flutua com o aumento da interação entre pessoas suscetíveis e infectadas, ocasionando na progressão da infecção. O  $\gamma I$  negativo trata-se da interação com o grupo de removidos  $R$ , considerando que os infectados diminuem com o aumento de pessoas recuperadas e que não transmitem mais a doença, ou com o aumento de óbitos em decorrência dela.

A (4.13) fornece a taxa de variação de  $R$  em relação do tempo  $t$ , determinado por  $\gamma I$ , ou seja, diretamente relacionada com a taxa de recuperação de infectados ( $\gamma$ ).

Este é o modelo básico mais complexo, podendo considerar a infecção, a imunidade adquirida, e portanto pode ser aplicado na COVID-19.

Com estas informações, uma maneira gráfica de demonstrar as relações entre as subpopulações é através do seguinte fluxograma:

Figura 3 – Fluxograma do modelo SIR



Fonte: Autoria própria

Observemos que caso  $I = 0$ , ou seja, caso não tenha uma pessoa infectada, as equações (4.11),(4.12),(4.13) serão nulas, o que acarreta que nenhuma pessoa muda de grupo. Igualmente, se não houver pessoas suscetíveis, ou seja, se  $S = 0$  não ocorrerá um aumento no número de pessoas dos infectados. Portanto tomaremos  $S > 0$  e  $I > 0$ .

Ao se tratar da pandemia da COVID-19, temos que ela cresce quando o número de infectados aumenta, ou seja, temos uma epidemia se:  $\frac{dI}{dt} > 0$  (LIMA, 2018).

Logo, utilizando de (4.12), temos que isso implica em:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\
\frac{dI}{dt} &= (\beta S - \gamma)I \\
(\beta S - \gamma)I &> 0 \\
\beta S &> \gamma \\
\frac{\beta S}{\gamma} &> 1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde  $\beta S$  é a taxa de indivíduos infectados que estão gerando novos casos da doença. E  $\frac{1}{\gamma}$  é a média de tempo que um indivíduo é infectado (BARROS, 2007).

Assim, temos que  $\frac{\beta S}{\gamma}$  é a média de infecções causadas por um indivíduo. Por conveniência é adotado a simbologia de  $R_0$ , denotado por número reprodutivo, logo, quando  $R_0 > 1$  temos uma epidemia, conseqüentemente, se  $R_0 < 1$  a incidência da doença diminui (AZEVEDO, 2021).

Portanto, é necessário um valor mínimo de pessoas para que esta ocorra, assim não existirá uma epidemia se  $N = S$  (BARROS, 2007).

Como  $0 < S < 1$ , no estágio inicial não se tem um número considerável de infectados, portanto podemos considerar  $S \approx 1$  (AZEVEDO, 2021). Tomemos como condições iniciais o sistema:

$$\begin{aligned}
R(0) &= 0 \\
I(0) &= I_0 \\
S(0) &= S_0 = N - I_0
\end{aligned}$$

Substituindo  $S \approx 1$  em (4.12) temos:

$$\frac{dI}{dt} \approx (\beta - \gamma)I$$

Utilizando da resolução por separação de variáveis de Cavalheiro e Santim (2021), temos como solução:

$$I(t) \approx I_0 e^{(\beta - \gamma)t}. \tag{4.15}$$

Onde para todo tempo  $t$  a população permanece constante.

Sendo que esta nos mostra que o comportamento inicial da função responsável por descrever o número de infectados é uma exponencial. Ainda é possível observar que

o grupo de infectados aumentará somente se  $\beta > \gamma$ , ou seja, quando a taxa de infecção for maior que a taxa de recuperação a doença se espalhará, sendo que quanto maior for a diferença  $\beta - \gamma$ , maior a velocidade de propagação. Portanto, para acabar com a infecção devemos buscar meios para que a diferença seja a menor possível, preferencialmente negativa (ABREU, 2020).

#### 4.5.1 Análise de Variáveis

Neste estudo nos limitaremos a uma análise de estimativas de casos de COVID-19, não adentrando em questões de impacto na sociedade como as taxas de mortalidade e hospitalização, bem como desconsiderando impactos econômicos.

##### 4.5.1.1 Suscetíveis $S$

De acordo com a equação (4.11), temos que quanto maior a população inicial (todos são suscetíveis no início da infecção), maior será o crescimento do número de infectados, portanto, um modo de agir nesta variável é reduzir o número de suscetíveis.

A redução deste número ocorre com a vacinação parcial ou total da população, ou ainda com o isolamento social, tendo em vista que caso o indivíduo adquira imunidade ou se este não possui contato com infectado, este poderá ser considerado recuperado no escopo do modelo SIR (ABREU, 2020).

No Brasil, a vacinação e o isolamento social foram duramente criticados devido a correntes negacionistas, assim este ato diminuiu a eficácia das medidas de controle nesta variável.

##### 4.5.1.2 Infectados $I$

Considerando o grupo de infectados, sua problemática é a propagação da doença devido o contato com pessoas suscetíveis, portanto uma medida eficaz é o isolamento social destes, no entanto, a dificuldade neste ponto é a possibilidade da pessoa infectada ser assintomática, assim ela contamina outras pessoas, mas não tem ciência deste feito (ABREU, 2020).

Uma outra problemática no isolamento de infectados é que restringir uma pessoa de contato total com outras é de extrema dificuldade por inúmeros motivos, sendo assim o ideal seria uma quarentena geral.

##### 4.5.1.3 Recuperados $R$

O aumento do grupo de recuperados é o mais visado em uma pandemia, tendo em vista que se trata de imunizados ou daqueles que não serão contaminados.

Sendo assim, o aumento de recuperados ocorre com a vacinação somada com medidas de isolamento da população.

#### 4.5.1.4 Taxa de propagação $\beta$

Como definido em (4.12), para diminuir o contágio, a taxa de propagação deve ser a menor possível, se tratando da COVID-19 este ato depende diretamente do contato entre as pessoas do grupo suscetível com uma pessoa do grupo infectado (ABREU, 2020).

Portanto, pode-se adotar medidas como o isolamento social, em casos de necessidade de contato com outras pessoas o uso de máscaras, e equipamentos de proteção. Obviamente, medidas que evitem aglomerações, e uma forte higienização do local onde uma pessoa infectada esteve podem auxiliar na baixa da taxa de propagação.

#### 4.5.1.5 Taxa de recuperação $\gamma$

Assim como no modelo SIS a taxa de recuperação trata do tempo de infecção, o aumento desta taxa ocorreria com a diminuição do tempo de infecção na pessoa.

Devido a variabilidade do vírus SaRS-COV-2, somado com condições físicas de cada individuo, é uma taxa de difícil identificação, não tendo um comprovado tratamento efetivo que reduza o tempo de infecção.

### 4.5.2 Aplicação do modelo

Para a aplicação do modelo, utilizaremos dos seguintes parâmetros:

- $S$ : representando uma fração da população,  $0 < S \leq 1$ ;
- $I$ : o número de infectados, no início considera-se  $I \approx 0$ ;
- $R$ : número de recuperados, considera-se  $0 \leq R < 1$ ;
- $\gamma$ : taxa de recuperação, para determiná-lo precisamos saber o tempo médio de recuperação de um infectado.
- $\beta$ : taxa de propagação, possível estimá-lo no modelo a partir da obtenção da taxa de recuperação.

Como foi dado na equação (4.15), o número de infectados é dado por uma função exponencial que tem como expoente  $(\beta - \gamma)t$ . Assim, tomando como bases os estudos de You et al. (2020), Wolfel et al. (2020) a média das taxas durante o mês, para a taxa de recuperação pode ser considerada como 10 dias portanto, consideraremos  $\gamma = \frac{1}{10}$ .

Consideraremos na aplicação do modelo o período de 28 abril de 2020 até 28 de fevereiro de 2022 em todo o país, para a população constante utilizaremos o disposto

no painel coronavírus BRASIL. Ministério da Saúde (2021), para o número de óbitos, infectados em todo o período investigado, bem como o número de curados até a data referência de 2020 serão utilizados os dispostos na linha do tempo da COVID-19 no país realizado por Sanarmed (2020).

Consoante com Cavalheiro e Santim (2021) adotaremos  $\beta = 2,19$ . Como o objetivo é comparar a afirmação do modelo e a realidade, vamos criar um gráfico através de um algoritmo Octave e analisarmos de acordo com os acontecimentos vivenciados nesse período.

Assim, teremos os seguintes valores para o modelo:

Tabela 1 – Dados da COVID-19 para simulação do modelo SIR

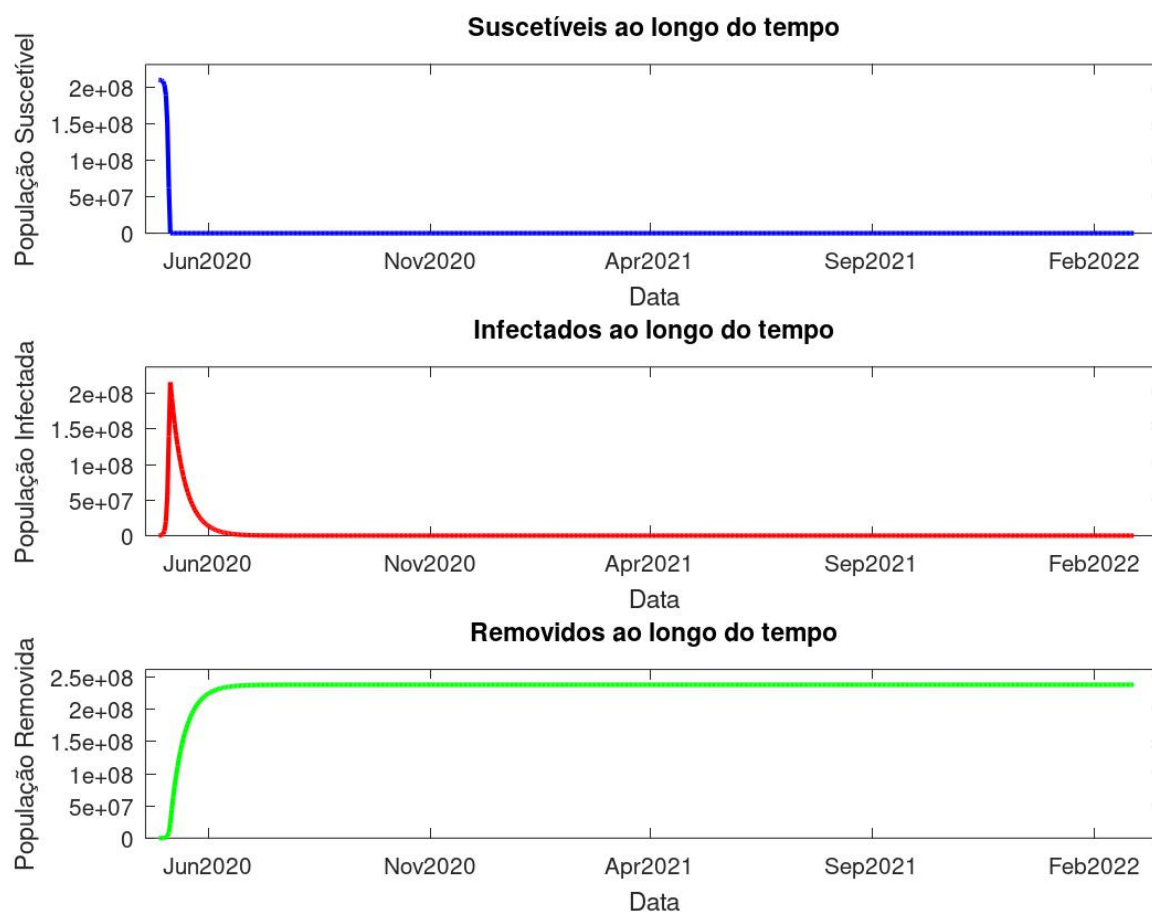
Dados	28 de abril de 2020
N (População)	210.147.125
S (Suscetíveis)	210.058.476
I (Infectados)	72.235
O (Óbitos)	5.083
C (Curados)	11.331
R (Removidos = C+O)	16.414
$\beta$ (Taxa de infecção)	2,19
$\gamma$ (Taxa de recuperação)	1/10

Fonte: Autoria própria

O algoritmo utilizado no software octave constará como apêndice no presente trabalho (Apêndice A), através da utilização dos dados da Tabela 1 e das equações (4.11),(4.12),(4.13) foram obtidos os seguintes gráficos:



Figura 4 – Simulação do modelo SIR



Fonte: Autoria própria

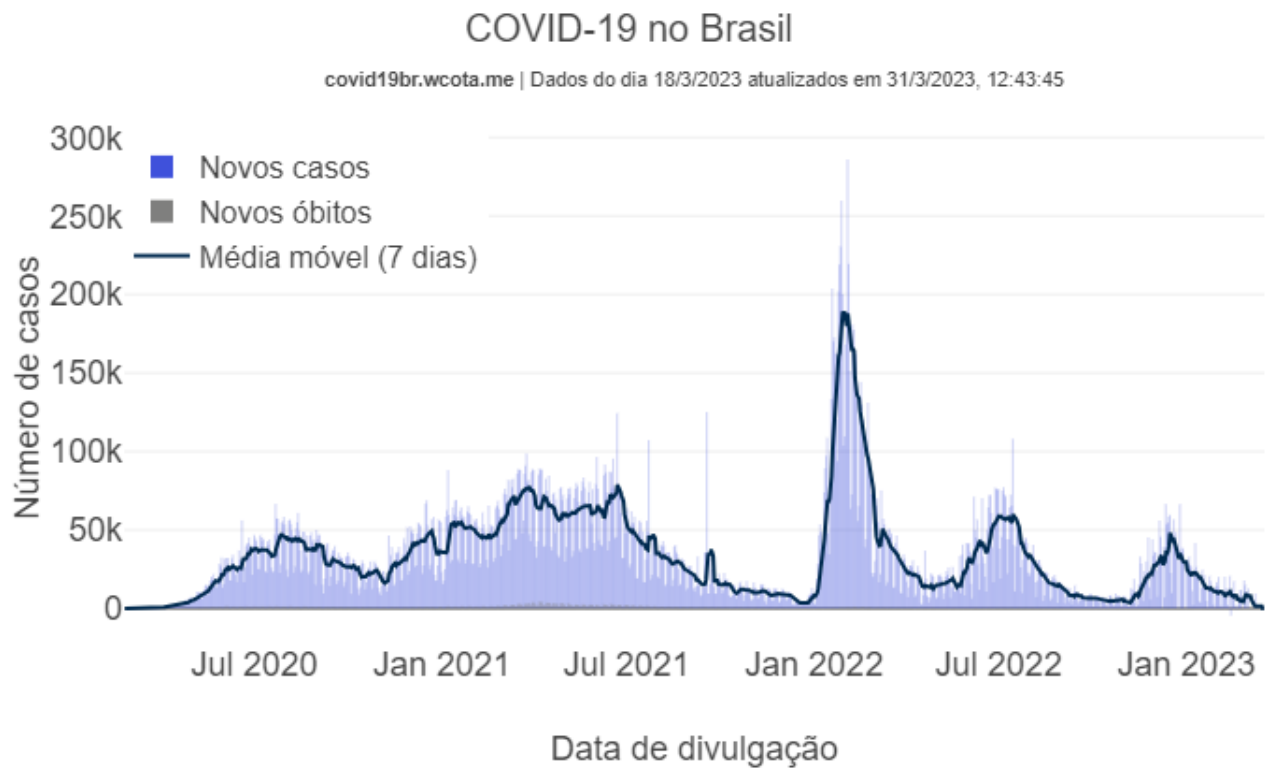
Desse, verifica-se uma queda extremamente acentuada no índice de Suscetíveis, levando o número de pessoas a atingir o valor 0. Isso implica que, em um curto período, não restariam mais pessoas saudáveis.

Os resultados indicam ainda um aumento exponencial nos casos de infectados em um intervalo muito breve. Antes mesmo de junho de 2020, teríamos atingido o pico, e até novembro do mesmo ano, não haveria mais infectados.

Paralelamente, o índice de removidos ilustra um crescimento exponencial em um curto espaço de tempo, estabilizando-se ao alcançar a população total. Isso significa que todos os indivíduos estariam recuperados ou teriam falecido antes do final do ano de 2020.

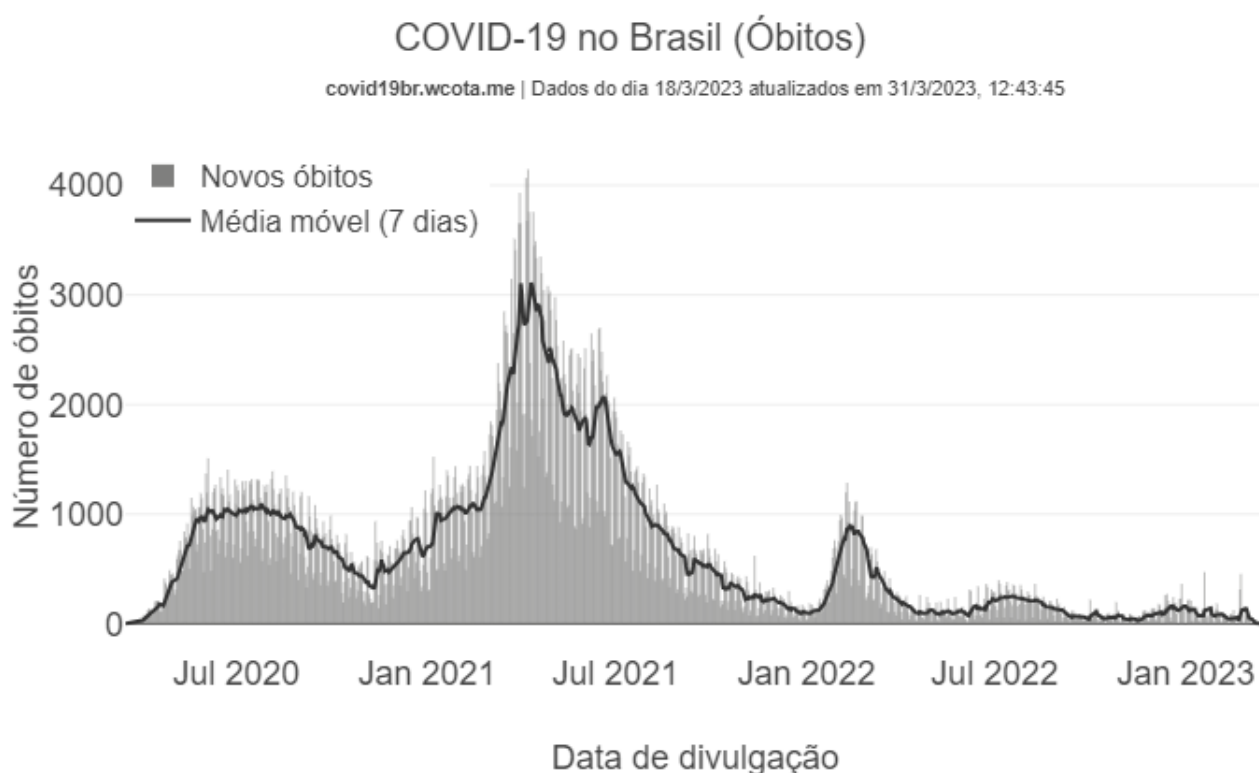
Estes dados, claramente fogem da realidade, podendo ser comparados com os meios noticiados:

Figura 5 – Número de Infectados no Brasil



Fonte: Wesley Cota (2023a)

Figura 6 – Número de óbitos no Brasil



Fonte: Wesley Cota (2023b)

Mesmo que os gráficos gerados não retratem exatamente o que foi observado na prática, um tormento atingiu o sistema de saúde do Brasil, onde a insuficiência de leitos, medicamentos e tanques de oxigênio foi acentuada. Tal fato teria sido ainda mais severo sem as interrupções realizadas, o que resultaria em um aumento significativo no número de óbitos.

Portanto, embora possa ser utilizado, existem problemáticas na aplicação, restringindo-o assim a algo que costuma ser realizado no início da infecção. Isso é feito para analisar o crescimento exponencial e possibilitar o planejamento e a execução de medidas de controle, a fim de obter mais informações biológicas e utilizar modelos mais robustos.

Além disso, destaca-se que as autoridades costumavam empregar esse modelo em períodos mais curtos. Devido às atualizações na taxa  $\beta$ , foram previstas várias variações, o que torna possível encontrar aplicações mais condizentes com a realidade.

#### 4.5.3 Considerações

Como pode ser analisado por meio deste trabalho, a previsão de contágio da Figura 4 afirma que aconteceria um pico de contaminação ainda em 2020, fato que só ocorreu em 2022 conforme Figura 5. Pelo fato do modelo não levar medidas de controle em

consideração, ele dispensa os efeitos das recomendações de distanciamento social realizadas no período que abrange o início da modelagem, uso de máscaras bem como o lockdown realizado inicialmente em regiões metropolitanas.

Assim, essas medidas de controle foram efetivas para a diminuição do contágio, tendo em vista que foram capazes de achatar a curva de contágio e de atrasar o pico de contaminação.

A previsão na Figura 4 apontou ainda que em pouco tempo todos estariam removidos, daí entende-se a soma de  $R + O = N$ , onde  $R$  seriam os recuperados,  $O$  os óbitos e  $N$  a população. Como no período não se tinham meios comprovadamente eficazes de recuperação, subentende-se que a maior parte da população estaria no grupo dos óbitos. Ao comparar este gráfico com a Figura 6 temos o pico de mortes em 2021, novamente, fica comprovada a eficácia das medidas de controle tendo em vista o atraso dos picos nas curvas de óbito.

Além disso, com o uso das vacinas ocorreu o aumento de recuperados e portanto removidos do modelo, fato que contribui com a diminuição de contágio vista na Figura 5.

Embora tenha suas restrições, o modelo SIR possibilitou prever o cenário de contágio da COVID-19 na ausência de medidas preventivas para controlar a taxa de propagação. Esse modelo, apesar de impreciso, aliado a outros parâmetros, fundamentou as estratégias adotadas no combate à pandemia, não apenas nacionalmente, mas globalmente.

Após anos de estudos, os modelos foram sendo aprimorados e tornando-se cada vez mais precisos, como o modelo SIRS, que consiste em um modelo SIR com perda de imunidade. Ou seja, neste modelo, os suscetíveis, ao serem infectados, adquirem uma imunidade, mas com o tempo a perdem e tornam-se novamente suscetíveis. Este modelo, apesar de mais complexo, não é comumente utilizado para a COVID-19, pois não se tem uma estimativa de tempo médio da perda de imunidade (LOPEZ-FLORES et al., 2021).

Há também o modelo mais intrincado, conhecido como SEIR, uma variação do modelo SIR. Nessa nova estrutura, o indivíduo suscetível é exposto, ou seja, torna-se um infectado sem capacidade de transmitir o vírus, até se tornar, de fato, um infectado contagioso. Posteriormente, pode-se recuperar e adquirir imunidade. No entanto, devido à limitação de conhecimento sobre o vírus causador da COVID-19, esse modelo não é empregado.

É crucial entender que cada modelo possui sua aplicabilidade em diferentes situações de infecção. Contudo, à medida que o modelo se torna mais complexo, sua proximidade com a realidade aumenta, incorporando mais variáveis à modelagem e tornando sua resolução mais desafiadora.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a pandemia, as pesquisas epidemiológicas foram estimuladas a buscar estratégias mais efetivas na gestão de enfermidades contagiosas. É claro que esta área desempenha um papel central ao empregar procedimentos de análise em abordagens de controle, tornando-se cada vez mais flexível para prevenir sérias ramificações na saúde coletiva. Portanto, é essencial que a epidemiologia tenha seus fundamentos embasados em pressupostos matemáticos para elaborar modelos aptos a mensurar diversos elementos dos fenômenos biológicos.

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações na epidemiologia, realizando uma pesquisa bibliográfica acerca dos temas de Equações Diferenciais Ordinárias, epidemiologia e modelagem matemática, com aplicação em modelos epidemiológicos do tipo SI, SIS e SIR, procurando meios de uma possível aplicação na COVID-19.

Com o intuito de analisar os três modelos quanto à aplicação no combate, todos foram explicitados. No entanto, apenas um pode ser utilizado na COVID-19, sendo assim, apenas o modelo SIR oferece resultados capazes de serem satisfatórios

Considerando as limitações dos modelos, juntamente com as dificuldades para chegar aos valores satisfatórios das variáveis, apesar de ser possível aplicá-lo na COVID-19, o modelo SIR apresenta deficiências devido à especificidade do vírus, como as condições de um exposto ao vírus que não é capaz de transmitir a doença, a perda de imunidade dos indivíduos recuperados, as variações das taxas de propagação e outros. No entanto, apesar de suas limitações, o modelo ainda foi capaz de validar a eficácia das medidas de controle empregadas no país durante a pandemia.

É importante ressaltar que todos os modelos utilizados neste trabalho estão em sua forma mais básica. Nessa perspectiva, a sofisticação das pesquisas realizadas evidencia a importância das estruturas de modelagem desenvolvidas para a análise computacional da epidemiologia e outras disciplinas científicas que devem possuir a matemática como alicerce.

## Referências

- ABREU, M. O. R. de. Modelagem matemática da covid-19 usando SIR. *Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática*, v. 4, 2020.
- ANDERSON, R. M.; MAY, R. M. *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Londres: OUP Oxford, 1992. (Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control).
- AZEVEDO, K. *Equações Diferenciais aplicadas à epidemiologia*. 51 f. Monografia (Graduação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2021.
- BARROS, A. M. R. Modelos matemáticos de equações diferenciais ordinárias aplicadas à epidemiologia. *Revista de Ciências Exatas e Tecnologia*, 2007.
- BRASIL. Ministério da Saúde. *Coronavírus Brasil*. 2021. <[https://infoms.saude.gov.br/extensions/covid-19\\_html/covid-19\\_html.html](https://infoms.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html)>. Acesso em: 27/11/2023.
- CAVALHEIRO, L. B.; SANTIM, M. P. A. Simulação da covid-19 pelo modelo SIR. In: CONGRESSO DE INOVAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO IFSP, 12., 2021, Cubatão. *Anais...* Cubatão: IFSP, 2021.
- CHINCHIO, A. C. *Introdução às equações diferenciais ordinárias e aplicações*. 87 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2012.
- EVES, H. *Introdução a história da matemática*. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.
- FARIAS, A. V. *Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul-FURG, 2018.
- FILHOS, F. F. C. *Algoritmos Numéricos*. 2. ed. Belo Horizonte: LTC, 2007.
- GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.
- KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. Contributions to the mathematical theory of epidemics. ii.—the problem of endemicity. In: THE ROYAL SOCIETY OF LONDON. *the Royal Society of London*. Londres, 1932. v. 138, p. 53–83.
- LIMA, J. I. d. *Um Estudo sobre Equações Diferenciais Ordinárias aplicado á epidemiologia*. 51 f. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, 2018.
- LOPEZ-FLORES, M. M. et al. *Equações diferenciais e modelos epidemiológicos*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2021.
- LUIZ, M. H. R. *Modelos matemáticos em epidemiologia*. 75 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2012.
- MATHIAS, L. A. *Epidemiologia*. Jaboticabal, 2014.
- RODRIGUES, R. A. *Modelos matemáticos em epidemiologia*. 56 f. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Pampa, Itaqui, 2021.

SANARMED. *Linha do tempo do Coronavírus no Brasil*. 2020. <<https://www.sanarmed.com/linha-do-tempo-do-coronavirus-no-brasil>>. Acesso em: 27/11/2023.

SNOW, J. *On the Mode of Communication of Cholera*. 2. ed. London: John Churchill, 1855.

Wesley Cota. *COVID-19 NO BRASIL*. 2023. <<https://covid19br.wcota.me/>>, Acesso em 10 de dezembro de 2023.

Wesley Cota. *COVID-19 NO BRASIL (ÓBITOS)*. 2023. <<https://covid19br.wcota.me/>>, Acesso em 10 de dezembro de 2023.

WOLFEL, R. et al. Virological assessment of hospitalized patients with covid-2019. *nature*, 2020.

YOU, C. et al. Estimation of the time-varying reproduction number of covid-19 outbreak in china. . *International Journal of Hygiene and Environmental Health*, 2020.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*. 10. ed. Boston: Cengage Learning, 2016.

## Apêndices



## APÊNDICE A – Algoritmo Octave utilizado na modelagem SIR

```

function SIR_Simulation()
% Solicitação dos dados da população, infectados, removidos, beta e gamma
population = input('Insira o tamanho da população: ');
infected = input('Insira o número inicial de infectados: ');
removed = input('Insira o número inicial de removidos: ');
beta = input('Insira a taxa de infecção (beta): ');
gamma = input('Insira a taxa de recuperação (gamma): ');
% Data de início e fim da simulação
start_date = datenum('28-Apr-2020');
end_date = datenum('28-Feb-2022');
% Número de dias na simulação
days = end_date - start_date + 1;
% Vetores para armazenar os resultados
S = zeros(1, days);
I = zeros(1, days);
R = zeros(1, days);
% Condições iniciais
susceptible = population - infected - removed;
S(1) = susceptible;
I(1) = infected;
R(1) = removed;
% Loop para simular o modelo SIR
for t = 2:days
dS = -beta * S(t-1) * I(t-1) / population;
dR = gamma * I(t-1);
dI = -dS - dR;
% Atualização dos valores, garantindo que não sejam menores que zero
S(t) = max(S(t-1) + dS, 0);
I(t) = max(I(t-1) + dI, 0);
R(t) = max(R(t-1) + dR, 0);
end
% Plotagem dos resultados
date_range = linspace(start_date, end_date, days);
plot(date_range, S, 'b', 'LineWidth', 2); % Linha azul mais grossa
hold on;
plot(date_range, I, 'r', 'LineWidth', 2); % Linha vermelha mais grossa

```

```

plot(date_range, R, 'g', 'LineWidth', 2); % Linha verde mais grossa
datetick('x', 'mmyyyy', 'keeplimits');
title('Simulação do modelo SIR');
xlabel('Data');
ylabel('População');
legend('Suscetíveis', 'Infectados', 'Removidos');
ylim([0 population]); % Define o limite y para mostrar toda a população
% Plotagem dos resultados em uma única janela com subplots
figure;
% Gráfico para os Suscetíveis
subplot(3, 1, 1);
plot(date_range, S, 'b', 'LineWidth', 2); % Linha azul mais grossa
datetick('x', 'mmyyyy', 'keeplimits');
title('Suscetíveis ao longo do tempo');
xlabel('Data');
ylabel('População Suscetível');
max_S = max(S);
ylim([0, max_S + max_S * 0.1]);
% Gráfico para os Infectados
subplot(3, 1, 2);
plot(date_range, I, 'r', 'LineWidth', 2); % Linha vermelha mais grossa
datetick('x', 'mmyyyy', 'keeplimits');
title('Infectados ao longo do tempo');
xlabel('Data');
ylabel('População Infectada');
max_I = max(I);
ylim([0, max_I + max_I * 0.1]);
% Gráfico para os Removidos
subplot(3, 1, 3);
plot(date_range, R, 'g', 'LineWidth', 2); % Linha verde mais grossa
datetick('x', 'mmyyyy', 'keeplimits');
title('Removidos ao longo do tempo');
xlabel('Data');
ylabel('População Removida');
max_R = max(R);
ylim([0, max_R + max_R * 0.1]);
% Ajuste do tamanho da janela para melhor visualização
set(gcf, 'Position', [100, 100, 800, 600]);
end

```

```
% Chama a função de simulação  
SIR_Simulation();
```