



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

LETÍCIA MENESES MARQUES

**CÔNICAS E QUÁDRICAS:
história, conceitos e aplicações**

PALMAS

2019

LETÍCIA MENESES MARQUES

**CÔNICAS E QUÁDRICAS:
história, conceitos e aplicações**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - *Campus* Palmas, como exigência à obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: prof. Me. Flávio Antônio Nolêto
Fernandes

PALMAS

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

M357c Marques, Letícia Meneses
Cônicas e Quádricas : história, conceitos e aplicações / Letícia Meneses
Marques. – Palmas, TO, 2019.
90 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
Palmas, Palmas, TO, 2019.

Orientador: Me. Flávio Antônio Nolêto Fernandes

1. Matemática. 2. Geometria Analítica. 3. Dispositivo didático. I.
Fernandes, Flávio Antônio Nolêto. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LETÍCIA MENESES MARQUES

**CÔNICAS E QUÁDRICAS:
história, conceitos e aplicações**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - *Campus Palmas*, como exigência à obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em ____ / ____ / ____

BANCA AVALIADORA

Prof. Me. Flávio Antônio Nolêto Fernandes (orientador)

IFTO - *Campus Palmas*

Prof. Me. José Ailton Rodrigues Soares

IFTO - *Campus Palmas*

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza

IFTO - *Campus Palmas*

*A todos que anseiam por conhecer o misterioso Cosmos e
movimentar a sabedoria compartilhada pelas gerações,
eu dedico este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

A mim, por não desistir do sonho de lecionar, apesar da desmotivação gerada pela sociedade na qual vivemos. À minha família, por me apoiar mesmo que eu não dedicasse tanto tempo à ela. Ao meu pai Márcio, que proporcionou a construção do dispositivo didático. À minha mãe Eliane, e por sua compreensão nos momentos em que precisou de mim. Ao meu tio Rafael e sua esposa Laíza, que me ajudaram a colocar o bendito motor para funcionar.

Agradeço ao prof. Me. César Nascimento, que em pleno feriado me ensinou um pouco da base do Georreferenciamento em um banco de shopping. Ao colega da Física, Marco Dutra, que cedeu o interruptor para o meu trabalho. Aos colegas Arthur Batista, Dimas Pimentel, Frank Lustosa, Helom Zive e José Carlos por me suportarem durante estes 4 anos no curso.

Deixo também meu agradecimento ao prof. Me. Flávio Nolêto, que neste curto período de tempo (4 meses), me orientou e fez o possível para termos um bom trabalho apesar das circunstâncias, me contatando sempre com ideias criativas e revolucionárias, que infelizmente pelo tempo, não foram possíveis de colocar em prática.

Não posso deixar de agradecer ao Google e sua ferramenta de busca gratuita e muito eficaz, sem a qual esta monografia não ficaria pronta tão cedo. Aos criadores da internet, deixo minha gratidão pelo vasto acesso as informações universais.

Para iludir minha desgraça, estudo.

Intimamente sei que não me iludo.

Augusto dos Anjos

RESUMO

Neste trabalho faz-se um estudo das secções cônicas de forma histórica, geométrica, analítica e didática, além de apresentar as principais ocorrências e aplicações de tais curvas no mundo tangível. Na abordagem histórica é apresentado o contexto dos primeiros estudos feitos envolvendo as cônicas, definições elementares e principais estudiosos. No tratamento geométrico, tais curvas são definidas como lugar geométrico e resultado da intersecção de um plano com um cone. No tratamento analítico são estabelecidas as equações cartesianas de segundo grau que representam as cônicas, o conceito de excentricidade e como ela interfere na forma das curvas através da definição foco-diretriz. Após tais caracterizações, é apontada a propriedade refletora e uma breve explanação a respeito das superfícies quádricas, que são representações do movimento das cônicas no \mathbb{R}^3 . O capítulo de etimologia preocupa-se em esclarecer a relação entre as principais palavras utilizadas, seus significados, origens e relevância didática. Após apresentação teórica, a parábola, elipse e hipérbole são expostas de maneira prática, em diversas áreas de estudo. Finalmente, é narrada a construção e utilização de um dispositivo didático gerador de cônicas que se dão por trajetórias luminosas obtidas por meio de um ponteiro laser que secciona um cone de revolução. A metodologia utilizada foi a pesquisa básica estratégica, com objetivo de produzir um saber que possa ser útil no futuro, provocando transformações e soluções de problemas, tendo como público-alvo os professores de matemática.

Palavras-chave: Matemática. Geometria analítica. Prática. Dispositivo didático.

ABSTRACT

In this research, the conical sections are studied historically, geometrically, analytically and didactically, and the main occurrences and applications of such curves in the tangible world are presented. The historical approach presents the context of the first studies involving the conics, elementary definitions and main scholars. In the geometric processing, such curves are defined as locus and a result from the intersection of a cone with a plan. In the analytical processing, the second-degree Cartesian equations that represent the conics, the concept of eccentricity and how it interferes in the shape of the curves through the focus-directrix setting are established. After such characterizations the reflective property is pointed out and a brief explanation about the quadric surfaces, which are representations of the conical movement in the \mathbb{R}^3 . The etymological chapter is concerned with clarifying the relationship between the main words used, their meanings, origins and didactic relevance. Shown the theoretical part, the parable, ellipse and hyperbole are exposed in a practical way, in various areas of study. Finally, it is narrated the construction and use of a didactic device that generates conics that occur through light trajectories obtained by means of a laser pointer that cuts a cone of revolution. The methodology used was the basic strategic research, aiming to produce knowledge that may be useful in the future, causing transformations and problem-solving, targeting the mathematics teachers.

Keywords: Mathematics. Analytical geometry. Practical. Didactic device.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Duplicação do Cubo	15
2	Proporção Contínua	16
3	Solução gráfica do problema da duplicação do cubo	17
4	Como se obtinha a parábola	17
5	Como se obtinha a hipérbole	18
6	Como se obtinha a elipse	18
7	Cônicas obtidas através de diversas secções de um mesmo cone de duas folhas .	19
8	O primeiro ponto obtido	20
9	Obtendo uma reta tangente à parábola	20
10	Parábola formada a partir de suas retas tangentes	21
11	Construção geométrica de uma elipse	22
12	Circunferência: um caso particular de elipse	22
13	Construção da elipse a partir de suas retas tangentes	22
14	Construção da hipérbole a partir de dobraduras	23
15	Cônicas como lugar geométrico	23
16	Parábola arbitrária num referencial cartesiano	24
17	Parábola com foco $F(-p, 0)$ e equação $y^2 = -4px$	26
18	Parábola com foco $F(0, p)$ e equação $x^2 = 4py$	26
19	Parábola com foco $F(0, -p)$ e equação $x^2 = -4py$	27
20	Elipse arbitrária num referencial cartesiano	28
21	Relação existente entre a , b e c na elipse	29
22	Elipse com equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	29
23	Hipérbole arbitrária	30
24	Hipérbole de abertura norte-sul	31
25	Hipérbole e suas assíntotas	31
26	Plano cartesiano e eixos auxiliares	32
27	Parábola com equação $y^2 = 12x$	33
28	Parábola com equação $(x - 1)^2 = 20(y + 2)$	34
29	Parábola com equação $x^2 - 2x + y - 16 = 0$	35
30	Elipse com equação $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$	36
31	Circunferência com equação $x^2 + y^2 - 6x - 16y = -24$	37

32	Elipse com equação $3x^2 + 4y^2 = 36$	38
33	Hipérbole com equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$	39
34	Hipérbole com equação $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$	40
35	Hipérbole com equação $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$	40
36	Distância entre P, o foco e a diretriz	41
37	Elipse e suas diretrizes r_1 e r_2	42
38	Comparação entre diferentes excentricidades de elipses	43
39	Hipérbole e suas diretrizes r_1 e r_2	44
40	Excentricidade e o formato das cônicas	45
41	Paraboloide elíptico seccionado	49
42	Paraboloide hiperbólico seccionado	50
43	Elipsoide seccionado	50
44	Hiperboloide de uma folha seccionado	51
45	Hiperboloide de duas folhas seccionado	52
46	Cone elíptico seccionado	52
47	Concepção de um cone duplo	53
48	Cônicas a partir do cone de duas folhas	53
49	Cônicas degeneradas a partir do cone de duas folhas	54
50	Quádricas de revolução	55
51	Representação da Proposição 1	56
52	Representação da Proposição 2	56
53	Representação da Proposição 3	57
54	Representação da Proposição 4	57
55	Parâmetro p da parábola	59
56	<i>Latus rectum</i> da elipse	59
57	<i>Latus rectum</i> da hipérbole	60
58	O “Raio da Morte” de Arquimedes	62
59	Raio de calor	62
60	Ponte de Manhattan - Estados Unidos	62
61	Ponte George Washington	63
62	A maior ponte suspensa do mundo: Akashi Kaikyō - Japão	64
63	Comparação entre a catenária (vermelha) e a parábola (verde)	64

64	Forno solar parabólico	65
65	Maior forno solar do mundo: Odeillo - França	65
66	Princípio de funcionamento da antena parabólica	66
67	Antena parabólica	66
68	Parabolóide de revolução seccionado	67
69	Posição do emissor de luz e raios refletidos	67
70	Acendendo a tocha olímpica	68
71	Heliocentrismo de Copérnico - 1543	69
72	Lunetas astronômicas de Galileu	70
73	Órbita elíptica em torno do Sol	71
74	Elipsóide de referência e seus componentes	72
75	Coordenadas geodésicas e cartesianas do ponto P	72
76	Modelo atômico de Rutherford	73
77	Modelo de uma Sala de Sussurros	74
78	Statuary Hall	75
79	Pessoas sussurando nas paredes da Grand Central Station	75
80	Aparelho litotriptor	76
81	Refletor odontológico e seu funcionamento	76
82	Copo inclinado e elipse formada pelo líquido	77
83	Esquema óptico do telescópio Cassegrain	78
84	Gráfico da função demanda	78
85	Ondas de pressão produzidas por um avião supersônico	79
86	Avião supersônico e o cone de <i>Mach</i>	80
87	Limiar de audibilidade	80
88	Dispositivo pronto	83
89	Cônicas obtidas	84

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	ABORDAGEM HISTÓRICA	15
2.1	O berço das Cônicas	15
2.2	Apolônio de Perga	18
3	TRATAMENTO GEOMÉTRICO	20
3.1	Parábola	20
3.2	Elipse	21
3.3	Hipérbole	23
3.4	Síntese	23
4	TRATAMENTO ANALÍTICO	24
4.1	Parábola	24
4.2	Elipse	27
4.3	Hipérbole	30
4.4	Translação de eixos	32
4.5	Praticando	33
5	EXCENTRICIDADE	41
5.1	Parábola	41
5.2	Elipse	42
5.3	Hipérbole	44
6	DEFINIÇÃO UNIFICADA E EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS	45
7	QUÁDRICAS	48
7.1	Paraboloide	49
7.1.1	Paraboloide elíptico	49
7.1.2	Paraboloide hiperbólico	49
7.2	Elipsoide	50
7.3	Hiperboloide	51
7.3.1	Hiperboloide de uma folha	51

7.3.2	Hiperboloide de duas folhas	51
7.4	Cone elíptico	52
8	CONE DUPLO E AS CÔNICAS	53
9	PROPRIEDADE REFLETORA	55
9.1	Parábola	56
9.2	Elipse	57
9.3	Hipérbole	57
10	ETIMOLOGIA	58
10.1	Parábola	58
10.2	Elipse	59
10.3	Hipérbole	60
10.4	Foco	60
11	OCORRÊNCIAS E APLICAÇÕES	61
11.1	Parábola	61
11.1.1	Um pouco de história	61
11.1.2	Pontes de suspensão	62
11.1.3	Forno solar	64
11.1.4	Antena parabólica	65
11.1.5	Dispositivos de iluminação	67
11.1.6	Curiosidades: outras ocorrências das parábolas	68
11.2	Elipse	69
11.2.1	Mecânica celeste	69
11.2.2	Elipsoide de referência	71
11.2.3	Modelo Atômico	73
11.2.4	Galeria de Sussurros	74
11.2.5	Medicina: Litropsia	75
11.2.6	Curiosidades: outras ocorrências das elipses	76
11.3	Hipérbole	77
11.3.1	Telescópio de reflexão	77
11.3.2	Administração e economia	78

11.3.3	Avião Supersônico	79
11.4	Outras ocorrências	80
12	DISPOSITIVO DIDÁTICO	81
12.1	Princípio de funcionamento	81
12.2	Procedimento de construção	82
12.3	Resultados	83
12.4	Algumas considerações	84
13	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

No decorrer da vida como estudante, como licenciando e como professor pode-se perceber um questionamento comum entre todas estas experiências: “Para que se usa isso, professor?”. É evidente que sem a devida contextualização e/ou conhecimentos mais aprofundados sobre o problema, alguns conteúdos matemáticos apresentados em sala, ficam sem aplicabilidade imediata, porém, a fim de contribuir para algumas das tantas respostas para o questionamento levantado, foi decidido pesquisar mais profundamente acerca das cônicas.

O tema do presente trabalho surgiu da curiosidade de relacionar as seções cônicas e quádricas com as diversas situações e objetos com os quais nos deparamos no cotidiano e, também para promover conhecimentos das variadas aplicações a respeito do tema, a fim de amparar os conhecimentos de professores de matemática, tanto os formados quanto os que estão em formação. Ampliando noções do emprego do conteúdo considerado, com a finalidade de ter maior propriedade para ministrar aulas e colocar em prática os saberes adquiridos.

As cônicas fazem parte do cotidiano dos alunos desde muito cedo, mas infelizmente a maioria não percebe, mesmo depois de estudá-las analiticamente. A proposta deste trabalho é explanar diferentes abordagens do assunto, buscando responder ao problema cerne da pesquisa: **qual a relação existente entre teoria e prática no estudo das cônicas e quádricas?**

“Os matemáticos têm o hábito de estudar, apenas para o divertimento deles, coisas que parecem totalmente inúteis; em seguida, séculos mais tarde os seus estudos vêm a ter um enorme valor científico.” (BRITTON, 1999, p. 1, tradução nossa). Talvez quando iniciaram-se os estudos das cônicas, seus teóricos não tinham noção da amplitude que tal assunto poderia tomar, e das diversas inovações contidas nela.

Fazendo uma abordagem histórica, no capítulo 2 conta-se como tais curvas foram descobertas, suas primeiras concepções, definições elementares, principais estudiosos, contexto e processo que levou ao conhecimento atualmente existente. No capítulo 3, o tratamento geométrico aborda as cônicas como lugar geométrico e seu processo de construção. O tratamento analítico apresentado no capítulo 4 preocupa-se em representar as cônicas no plano cartesiano, explorando suas definições e desenvolvendo suas equações.

O capítulo 5 define a excentricidade, conceito ainda pouco explorado nas aulas de geometria analítica, porém muito interessante, que relaciona um número real positivo às formas

das curvas. O capítulo 6 explora a definição geral das cônicas, a partir de uma única equação que pode ser obtida pela definição dada no capítulo 5. As quádricas são brevemente mencionadas no capítulo 7, para dar noção geométrica em três dimensões e melhor relacionar o conteúdo à vida real. Ademais, equações dos principais tipos de quádricas são apresentadas, bem como suas secções feitas por um plano.

O cone de duas folhas é definido e explorado no capítulo 8, fazendo uma síntese da sua relação com todas as cônicas, sendo apresentadas as chamadas degeneradas. Após tais conceitos, apresenta-se as propriedades de reflexão no capítulo 9, elas são de grande utilização em diversas áreas de conhecimento como por exemplo, a astronomia. Um breve estudo etimológico é feito no capítulo 10, buscando colaborar para melhor compreensão da lógica utilizada para a representação dos assuntos apresentados. Como diz Barbosa (2014, p. 2):

O conhecimento da origem das palavras que fazem parte do cotidiano matemático faz-se necessário para que os estudos dos tópicos desta disciplina não sejam dados fora de um contexto. É de extrema importância que o aluno saiba que o conteúdo que será abordado é algo que tem um significado e uma justificativa.

O capítulo 11 trata da discussão principal do problema de pesquisa, onde são mostradas diversas ocorrências e aplicações das cônicas e quádricas. São abordados assuntos da engenharia civil, física, astronomia, engenharia cartográfica, química, arquitetura, medicina, odontologia, administração, economia, engenharia aeronáutica, e algumas curiosidades.

O capítulo 12 se refere a parte prática desta pesquisa básica estratégica, descrevendo o processo de construção, princípio de funcionamento e resultados obtidos a partir de um dispositivo didático gerador de cônicas, utilizando luz de laser. Como conclusão, é visto que ao assunto ainda cabe muitas outras explorações, tendo sido satisfatório e produtivo investigar e escrever a respeito deste tema.

No que tange os pré-requisitos, uma vez que o trabalho tem como público-alvo os professores de matemática, espera-se que os leitores já possuam conhecimento básico de geometria plana e espacial como distância euclidiana, plano cartesiano, ponto e reta, noções de álgebra e leis físicas de reflexão. Deseja-se uma boa leitura e ótima viagem a este mundo abstrato, chamado matemática!

2 ABORDAGEM HISTÓRICA

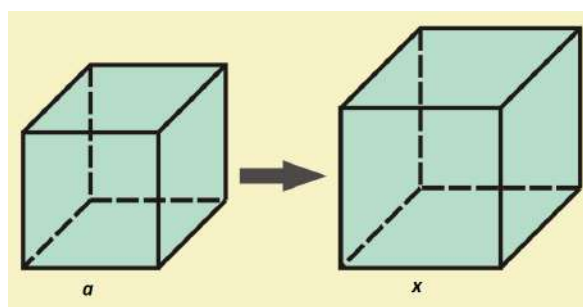
No tocante a abordagem histórica e contextualização no ato de lecionar, Reisi e Nehring (2017, p. 341) afirmam que “tem por objetivo fundamentar o processo de aprendizagem, pois possibilita estabelecer sentidos do aluno para os significados dos conceitos matemáticos.”. Sendo assim, este capítulo preocupa-se em destacar as circunstâncias que conduziram às definições e conceitos que conhecemos hoje.

2.1 O berço das Cônicas

O nascimento da teoria das secções cônicas é enigmático e um tanto quanto ignoto, porém existe um consenso de que elas foram descobertas através das tentativas de resolução do problema da *Duplicação do Cubo* (LOPES, 2011). Ele talvez foi o problema mais famoso na Antiguidade, concorrendo com a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo; é um problema de enunciado muito simples e talvez por esse motivo tenha despertado o interesse de muitos matemáticos (SOUSA, 2001), observe abaixo a exposição da questão e sua ilustração na Figura 1:

Duplicação do Cubo: Dado um cubo de aresta a , determinar com régua não graduada e compasso, o lado x de um outro cubo com o dobro do volume (CORREIA, 2013).

Figura 1: Duplicação do Cubo



Fonte: Helfmann (2009, adaptação nossa)

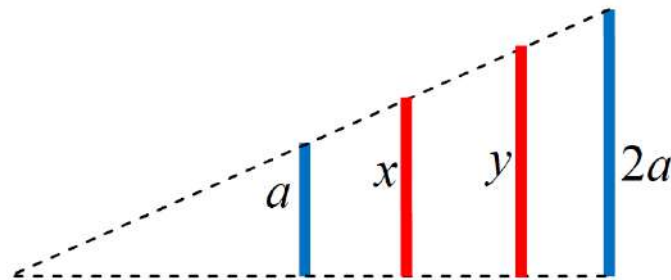
Não se conhece quem propôs o problema, porém ele foi discutido com afinco nos anos 300 e 400 a.C. Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) foi quem sugeriu uma resolução reduzindo o problema a um outro, de geometria plana. Continuou não sendo possível solucionar a questão utilizando apenas régua e compasso, mas propiciou a manifestação de novas técnicas

geométricas (SOUSA, 2001). O matemático afirmou que seria preciso determinar dois segmentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, ou seja, encontrando dois meios proporcionais entre a e b o cubo de aresta x teria seu volume dilatado na razão $\frac{b}{a}$.

Como para a resolução do problema considera-se $\frac{b}{a} = 2$, conseqüentemente $b = 2a$, logo percebe-se que a duplicação do cubo é um caso particular e obtêm-se as proporcionalidades $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

Perceba através da Figura 2 como o problema de geometria espacial foi reduzido por Hipócrates a um problema de geometria plana não menos complexo:

Figura 2: Proporção Contínua



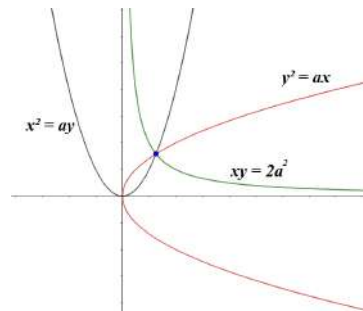
Fonte: Correia (2013, p. 5)

Da proporção contínua proposta, deduz-se pela primeira igualdade $x^2 = ay \rightarrow y = \frac{x^2}{a}$, ao substituir o valor de y na equação $y^2 = 2ax$ obtida através da segunda igualdade, temos que $x^3 = 2a^3 \rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$, sendo esta a solução do problema da *Duplicação do Cubo*. Entretanto, encontrar a solução não é o objetivo principal do trabalho, continuar-se-á a tratar sobre as origens históricas das cônicas.

O matemático Menaechmus (380 - 320 a.C.) foi quem procurou curvas que possuíssem as propriedades adequadas à resolução do problema. Na abordagem atual da geometria analítica é fácil perceber que basta obter as soluções do sistema de qualquer par das três equações $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$, $\frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ e $\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$ e teremos a intersecção de cônicas. O que é equivalente a resolver em pares $x^2 = ay$ (parábola), $y^2 = 2ax$ (parábola), $xy = 2a^2$ (hipérbole), nomes estes posteriormente atribuídos por Apolônio de Perga (262 - 194 a.C.).

A caráter de ilustração para melhor entendimento do que foi acima descrito, a solução será representada graficamente. Vale ressaltar que características e propriedades serão explicadas no **Tratamento Analítico**.

Figura 3: Solução gráfica do problema da duplicação do cubo

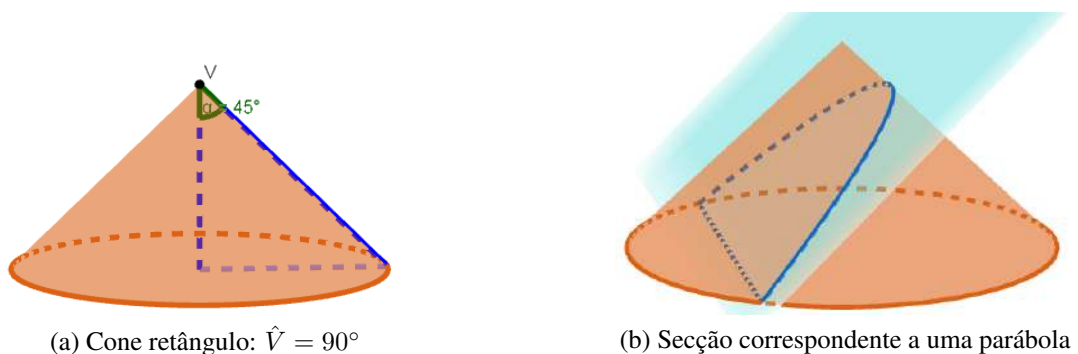


Fonte: produção própria

Menaechmus fez esta descoberta por volta do anos 360 ou 350 a.C., sendo considerado o primeiro geômetra a elaborar uma representação estereométrica das secções cônicas; inclusive “a descoberta da elipse parece ter sido feita também por ele como um simples subproduto dessa sua pesquisa.” (LOPES, 2011, p. 34). Segundo Correia (2013, p. 6), não se sabe como ele produziu tais curvas, e também “enigmático é saber como os gregos se aperceberam de que tais curvas podiam ser geradas como secções do cone”.

Mesmo com a exploração do problema da *Duplicação do Cubo* e os resultados alcançados pelo grego Menaechmus, apenas se percebeu que as cônicas podem ser obtidas seccionando diferentes cones retos, isto é, mantendo constante o raio da base e variando a altura e consequentemente o seu ângulo vértice.

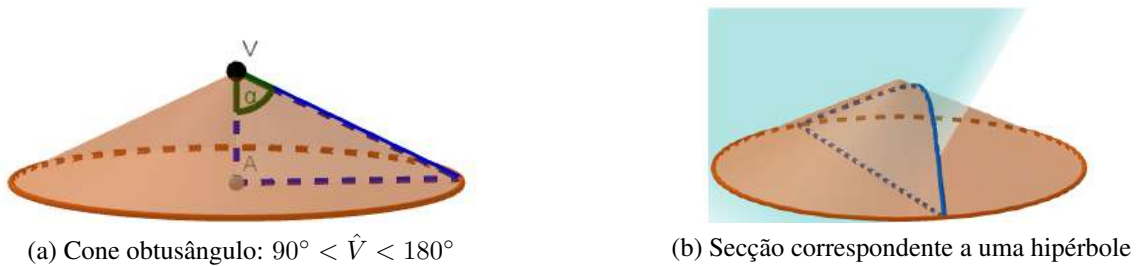
Figura 4: Como se obtinha a parábola



Fonte: produção própria

As figuras 4 , 5 e 6 foram elaboras com o software de matemática dinâmica *Geogebra*. Descrever a construção não é o objetivo no momento, mas observa-se que os planos secantes estão sempre de maneira perpendicular a geratriz do cone, ou hipotenusa do triângulo que o gera, e as curvas nomeadas de cônicas consistem na intersecção das duas superfícies.

Figura 5: Como se obtinha a hipérbole



Fonte: produção própria

Figura 6: Como se obtinha a elipse



Fonte: produção própria

Vale ressaltar que o ângulo \hat{V} ao qual se refere a imagem é definido como o dobro do ângulo α , formado pela geratriz do cone e seu eixo perpendicular ao plano da base. Na Figura 5b, a hipérbole mostra-se com apenas uma das folhas, já que ainda não havia a concepção do cone de duas folhas, definido posteriormente por Apolônio de Perga.

2.2 Apolônio de Perga

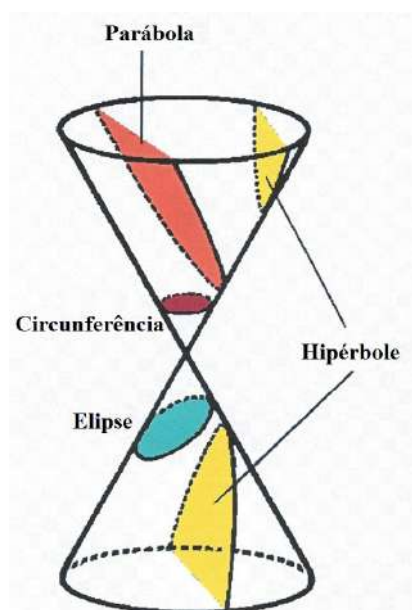
No final do século IV a.C. já existiam dois tratados abrangentes a respeito das cônicas, visto que após a obra de Menaechmus o estudo dessas curvas progrediu celeremente. Euclides (325 - 265 a.C.), segundo Gaspar (2014, p. 12), “edificou a Geometria como sistema lógico, conferindo-lhe o caráter de ciência dedutiva” através da sua obra *Os Elementos*, mas infelizmente a obra euclidiana *Cônicas* se perdeu. Esta obra consistia em quatro livros, e foi citada por Pappo de Alexandria (290 - 350 d.C.).

Outra obra considerável citada por Papo foi *Lugares sólidos*, redigida por Aristeu (370 - 300 a.C.), também matemático grego. De acordo com Lopes (2011, p. 35) “O nome *Lugares sólidos* era usado pelos gregos quando se referia as seções cônicas oriundas da definição estereométrica dada por Menaechmus em sua obra”. Todavia, Apolônio de Perga (262 - 194 a.C.), contemporâneo de Euclides, “foi o matemático que estudou as seções cônicas de uma maneira mais minuciosa, gerando todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção.” (SOUZA, 2014, p. 18).

As Cônicas de Apolônio era composta por oito volumes, sendo os três primeiros baseados nos produtos de Euclides. Foi ele quem definiu o cone de duas folhas como o resultado da revolução de uma reta ao longo de uma circunferência, passando sempre por um ponto fixo. Consequentemente, a hipérbole passou a ser definida como uma curva de dois ramos, como estudamos nos dias de hoje (LOPES, 2011).

Com seu trabalho, Apolônio de Perga passou a ser conhecido como “O Grande Geômetra”, e considerado um dos fundadores da Geometria Analítica (GASPAR, 2014). Além de descobrir que cones oblíquos e escalenos também podem gerar cônicas, mostrou minuciosamente como obter todas as seções cônicas a partir de um único cone e além disso, nomeou-as. A “secção do cone acutângulo” converteu-se em elipse, “secção do cone obtusângulo” em hipérbole e a parábola referir-se-ia a “secção do cone reto”.

Figura 7: Cônicas obtidas através de diversas seções de um mesmo cone de duas folhas



Fonte: Yolkowski (2012, adaptação nossa)

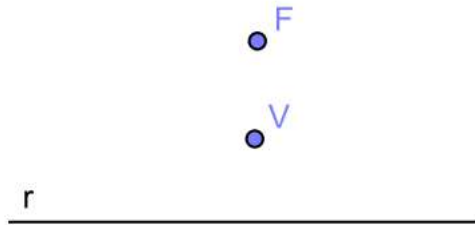
3 TRATAMENTO GEOMÉTRICO

3.1 Parábola

Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a ela. O lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de F e r chama-se parábola (LENZ, 2014). Isso é compatível com a igualdade $d(P, F) = d(P, r)$. Analisando passo a passo:

Como F não pertence a r , é bem intuitivo que o primeiro ponto que encontramos é o ponto V médio do segmento que une F à r , perpendicular à reta (Figura 8).

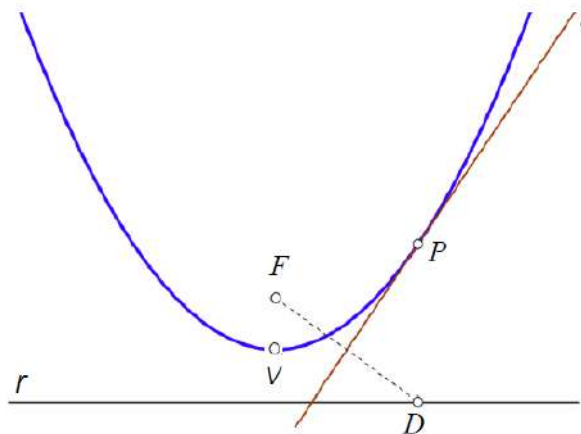
Figura 8: O primeiro ponto obtido



Fonte: Lenz (2014, p.33, adaptação nossa)

Seguindo o mesmo raciocínio, para cada ponto D pertencente a reta traça-se um segmento de reta unindo F ao ponto escolhido. No ponto médio deste segmento, faz-se a mediatriz que será tangente à parábola no ponto P . Veja a ilustração do procedimento na Figura 9.

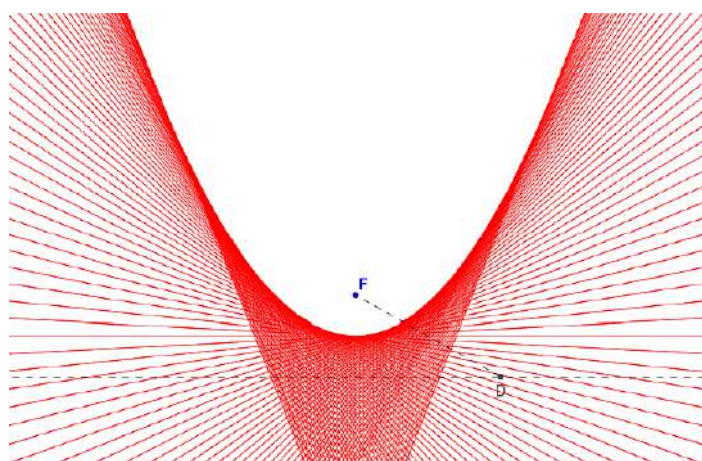
Figura 9: Obtendo uma reta tangente à parábola



Fonte: Correia (2013, p. 99, adaptação nossa)

Fazendo este processo repetidas vezes, as retas tangentes formarão a curva conhecida como parábola. É possível realizar o procedimento utilizando papel transparente, dobrando o papel de modo que o ponto D coincida com o ponto F, e a dobra lograda após tal processo é correspondente a tangente à cônica. Segue a imagem de uma simulação do método utilizando o *Geogebra*.

Figura 10: Parábola formada a partir de suas retas tangentes



Fonte: Correia (2013, p. 100, adaptação nossa)

3.2 Elipse

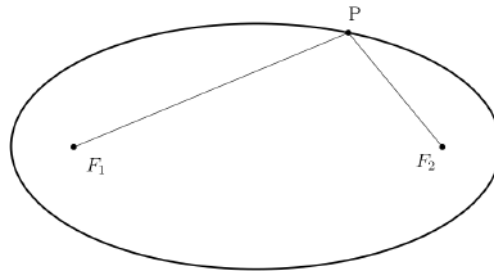
Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Definindo os pontos F_1 e F_2 em um plano, chamar-se-ão de focos. A elipse obedece a seguinte relação, denominada Equação Focal: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = k$, sendo P um ponto qualquer da elipse e k uma constante pertencente ao \mathbb{R} .

Para construí-la manualmente utilizando papel, fixe dois pinos em F_1 e F_2 . Feito isso, ligue-os com um fio inextensível, de comprimento k . A construção é feita deslizando um lápis pelo papel de modo que o fio fique sempre esticado, e a imagem obtida após tal procedimento corresponde a elipse. Veja a Figura 11. Este método é chamado de Método do jardineiro, e o instrumento caseiro utilizado é um elipsógrafo.

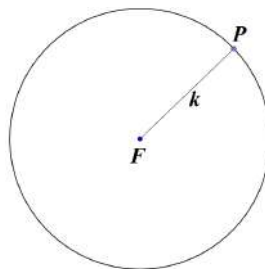
Vale destacar que se os focos F_1 e F_2 coincidem, a imagem obtida é um caso particular da elipse, chamada circunferência (Figura 12).

Figura 11: Construção geométrica de uma elipse



Fonte: Matika (2019a, adaptação nossa)

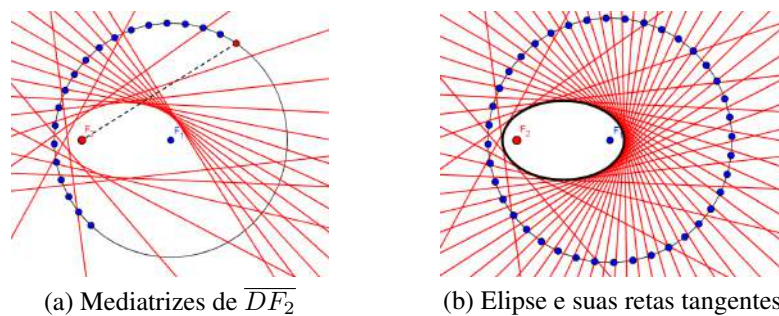
Figura 12: Circunferência: um caso particular de elipse



Fonte: produção própria

Um método menos conhecido para construir elipses dispõe de uma circunferência já estabelecida, tendo como centro o ponto F_1 . Determina-se um outro ponto qualquer pertencente ao círculo, isto é, um ponto F_2 cuja distância a F_1 seja menor que o raio da circunferência. Depois disso, para qualquer ponto D pertencente a circunferência traça-se a mediatriz do segmento de reta $\overline{DF_2}$ (Figura 13a). Realizando a operação para todos os pontos da circunferência se observa que as retas mediatrizes determinam uma cônica, a elipse. Estas retas são tangentes à cônica e os pontos F_1 e F_2 chamam-se focos da elipse. Assim como na parábola, é possível realizar o procedimento fazendo dobraduras no papel.

Figura 13: Construção da elipse a partir de suas retas tangentes

(a) Mediatrizes de $\overline{DF_2}$

(b) Elipse e suas retas tangentes

Fonte: Silva (2019, adaptação nossa)

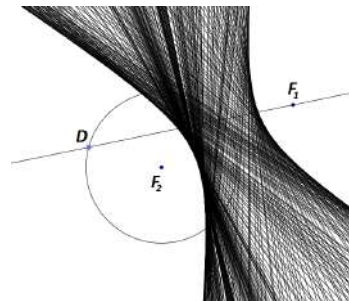
3.3 Hipérbole

Hipérbole é o conjunto dos pontos de um plano tais que o módulo das distâncias a dois pontos fixos é menor que a distância entre eles. Em outras palavras, é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a outros dois pontos é constante. Chamamos estes dois pontos fixos de focos F_1 e F_2 , e se estabelece a relação $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k < d(F_1, F_2)$, sendo P qualquer ponto pertencente a hipérbole e k uma constante pertencente ao conjunto \mathbb{R} .

Também é executável conceber esta cônica de maneira prática através de dobraduras, usando o mesmo conceito das mediatrizes entre F_1 e qualquer ponto D pertencente a circunferência. A diferença entre a construção da elipse e da hipérbole neste método, é que tomamos F_1 um ponto que não pertence ao círculo, e F_2 como o centro do círculo.

A hipérbole será a curva formada após as sucessivas dobragens e consiste em dois ramos; sua característica é que qualquer ponto da hipérbole é equidistante a um dos focos e aos pontos do círculo diretor cujo centro é outro foco. Veja a simulação do método das dobraduras feita através do software de geometria dinâmica:

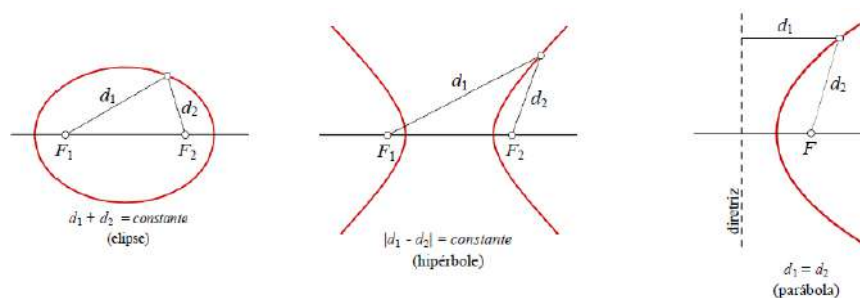
Figura 14: Construção da hipérbole a partir de dobraduras



Fonte: Felipe (2019, adaptação nossa)

3.4 Síntese

Figura 15: Cônicas como lugar geométrico



Fonte: Correia (2013, p.95)

4 TRATAMENTO ANALÍTICO

A Geometria Analítica, também denominada coordenadas geométricas, teve seu início com os estudos do matemático francês René Descartes (1596 – 1650). A área se dedica ao estudo das formas e sólidos geométricos com o auxílio da álgebra.

Partindo das ideias geométricas vistas no capítulo anterior, trataremos as curvas de modo em que se encaixem no plano cartesiano com uma relação algébrica bem determinada, com base nos capítulos 5, 6 e 7 de (LOPES, 2011) e algumas mudanças de notação.

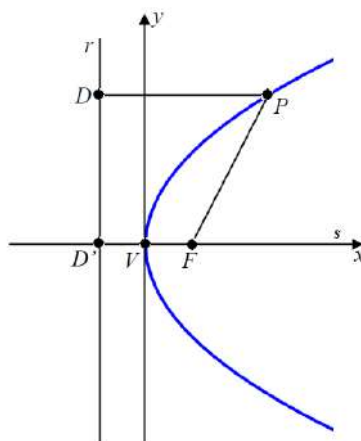
4.1 Parábola

Definição 1. *Sejam r uma reta e F um ponto qualquer não pertencente a r , isto é, $r \cap F = \emptyset$. O lugar geométrico dos pontos P de coordenadas cartesianas (x, y) equidistantes de F e r chama-se **parábola**. O ponto F é chamado de **foco** e a reta r , **diretriz**. O número positivo p tal que $d(F, r) = 2p$ é chamado de **parâmetro** da parábola, sendo $d(F, r)$ a distância euclidiana.*

Considera-se os seguintes elementos em uma parábola arbitrária (Figura 16):

- Foco: o ponto F ;
- Diretriz: a reta r ;
- Eixo de simetria: a reta s perpendicular à diretriz passando por F ;
- Vértice: o ponto V de interseção do eixo de simetria com a parábola.

Figura 16: Parábola arbitrária num referencial cartesiano



Fonte: Correia (2013, p. 38, adaptação nossa)

Em condições usuais, façamos do eixo Ox o eixo de simetria s , e do eixo Oy a mediatriz do segmento $\overline{FD'}$, em que D' é a interseção do eixo Ox com a reta r . O ponto D pertence a interseção de r com o segmento paralelo a s que possui extremidade em $P(x, y)$.

Das condições propostas, o vértice da parábola tem coordenadas $V(0, 0)$. Fazendo $d(F, D') = 2p$ por consequência $d(F, V) = p$ e $F(p, 0)$. Analogamente $d(D', V) = p$ e $D'(-p, 0)$. Como D' e D pertencem a mesma reta r , temos que $D(-p, y)$.

Da **Definição 1** vem:

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, r) \\ \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2} \\ \left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(x+p)^2}\right)^2 \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \end{aligned}$$

Daí obtém-se a chamada equação reduzida da parábola com vértice na origem e eixo de simetria sendo Ox :

$$y^2 = 4px \quad (1)$$

No caso acima, o foco se situa na parte positiva do eixo das abscissas. Pode-se obter outras equações que definem as parábolas dependendo de como o foco se situa em relação aos eixos coordenados.

Para $V(0, 0)$ e $F(-p, 0)$, a diretriz terá equação $r : x = p$, logo para $P(x, y)$ pertencer a parábola tem-se, pela **Definição 1**:

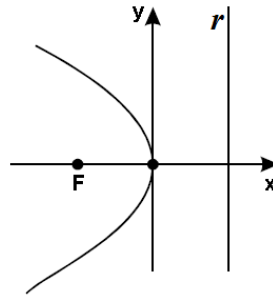
$$\sqrt{(x-(-p))^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-y)^2}$$

Que ao desenvolver os quadrados e simplificar resulta em:

$$y^2 = -4px \quad (2)$$

Neste caso a parábola possui concavidade para a esquerda. Veja a Figura 17.

Figura 17: Parábola com foco $F(-p, 0)$ e equação $y^2 = -4px$



Fonte: Venturi (1949, p. 43, adaptação nossa)

Para $V(0, 0)$ e $F(0, p)$, a diretriz terá equação $r : y = -p$, logo para $P(x, y)$ pertencer a parábola tem-se, pela **Definição 1**:

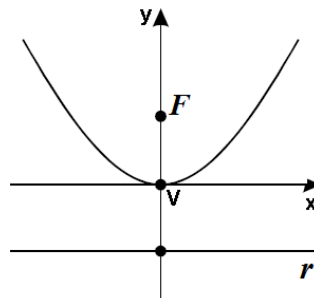
$$\sqrt{(x - 0)^2 + (p - y)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2}$$

Que ao desenvolver os quadrados e simplificar resulta em

$$x^2 = 4py \tag{3}$$

Neste caso a parábola possui concavidade para cima. Veja a Figura 18.

Figura 18: Parábola com foco $F(0, p)$ e equação $x^2 = 4py$



Fonte: Venturi (1949, p. 44, adaptação nossa)

Para $V(0, 0)$ e $F(0, -p)$, a diretriz terá equação $r : y = p$, logo para $P(x, y)$ pertencer a parábola tem-se, pela **Definição 1**:

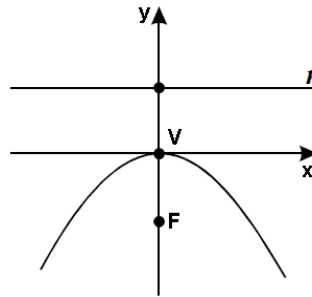
$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-p))^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - p)^2}$$

Que ao desenvolver os quadrados e simplificar resulta em:

$$x^2 = -4py \quad (4)$$

Neste caso a parábola possui concavidade para baixo. Veja a Figura 19.

Figura 19: Parábola com foco $F(0, -p)$ e equação $x^2 = -4py$



Fonte: Venturi (1949, p. 44, adaptação nossa)

4.2 Elipse

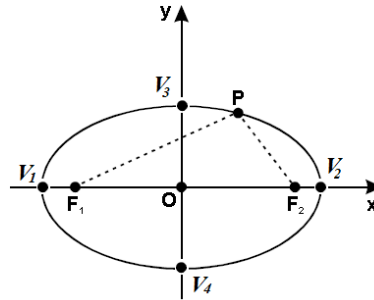
Definição 2. *Sejam F_1 e F_2 pontos distintos no plano π , com $2c > 0$ a distância entre eles. Seja a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico E determinado pelos pontos $P(x, y)$ tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ denomina-se **elipse**, onde d representa a distância euclidiana entre os pontos do plano. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de **focos** da elipse. O segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado segmento focal e seu ponto médio de **centro** da elipse. O valor $2c$ é chamado **distância focal**.*

Considera-se os seguintes elementos em uma elipse arbitrária (Figura 20):

- Foco: os pontos F_1 e F_2 ;
- Vértices: os pontos V_1 e V_2 de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos;
- Vértices: os pontos V_3 e V_4 de interseção da elipse com a mediatriz de $\overline{V_1V_2}$;
- Eixo maior: segmento $\overline{V_1V_2}$ de comprimento $2a$;
- Eixo menor: segmento $\overline{V_3V_4}$ de comprimento $2b$;
- Distância focal: distância entre os focos $F_1F_2 = 2c$;
- Centro O : interseção dos segmentos $\overline{V_1V_2}$ e $\overline{V_3V_4}$.

Considerando que o centro O da elipse coincide com a origem do sistema cartesiano e os focos estejam sobre o Eixo Ox , pelos elementos considerados acima tem-se $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Da **Definição 2** vem:

Figura 20: Elipse arbitrária num referencial cartesiano



Fonte: Venturi (1949, p. 71, adaptação nossa)

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \\
 \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} &= 2a \\
 \left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 &= (2a)^2 \\
 (x + c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x + c)^2 + y^2}\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 &= 4a^2 \\
 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 + 2\sqrt{(x^2 - c^2)^2 + y^2(x + c)^2 + y^2(x - c)^2 + y^4} &= 4a^2
 \end{aligned}$$

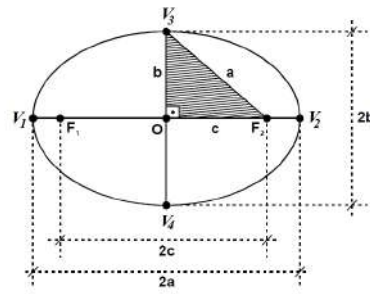
Dividindo por 2 e subtraindo $x^2 + y^2 + c^2$ em ambos os lados:

$$\left(\sqrt{(x^2 - c^2)^2 + y^2(x + c)^2 + y^2(x - c)^2 + y^4} \right)^2 = (2a^2 - x^2 - y^2 - c^2)^2$$

Ao desenvolver os quadrados e simplificar dividindo por 4 segue:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (5)$$

É possível reduzir a equação obtida observando que a , b e c seguem uma relação bem definida. Para facilitar os cálculos, fazemos $P(x, y) \in E$ coincidir com V_3 e é obtido um triângulo isósceles cujos vértices são F_1 , F_2 e P . Obedecendo a definição de que a soma das distâncias de P aos focos é $2a$, percebe-se que as medidas dos lados $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ são iguais a a . Logo é formado o triângulo retângulo e pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$. Deste modo $a^2 - c^2 = b^2$, podendo substituir na Equação (5).

Figura 21: Relação existente entre a , b e c na elipse

Fonte: Venturi (1949, p. 69, adaptação nossa)

Fazendo a substituição necessária

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

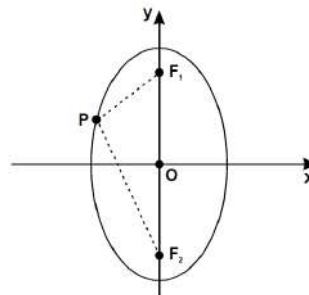
Ao dividir ambos os membros por a^2b^2 obtém-se a chamada equação reduzida da elipse com centro na origem e eixo maior pertencendo a Ox :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

Pode-se obter outras equações que definem as elipses dependendo de como os focos se situam em relação aos eixos coordenados. No caso do segmento focal pertencer ao eixo Oy , o processo para determinar a equação reduzida é análogo ao anterior, resultando em

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (7)$$

Figura 22: Elipse com equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



Fonte: Venturi (1949, p. 72)

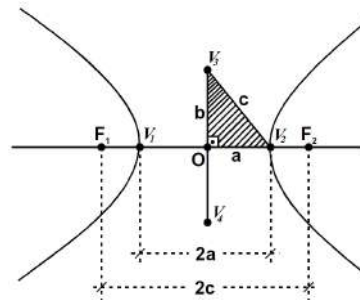
4.3 Hipérbole

Definição 3. Sejam F_1 e F_2 pontos distintos no plano π e $2c > 0$ a distância entre eles. Seja a um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico H determinado pelos pontos P de coordenadas cartesianas (x,y) tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ denomina-se **hipérbole**, onde d representa a distância euclidiana entre os pontos do plano. Os pontos F_1 e F_2 são chamados **focos** da hipérbole. O segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado **segmento focal** e seu ponto médio de **centro** da hipérbole. O valor $2c$ é chamado de **distância focal**.

Considera-se os seguintes elementos em uma hipérbole arbitrária (Figura 23):

- Focos: os pontos F_1 e F_2 ;
- Vértices: V_1 e V_2 , interseção da hipérbole com a reta que passa pelos focos F_1 e F_2 ;
- Eixo focal: segmento $\overline{V_1V_2}$ de comprimento $2a$;
- Eixo transverso: segmento $\overline{V_3V_4}$ de comprimento $2b$;
- Distância focal: comprimento $2c$ entre os focos F_1 e F_2 ;
- Centro O : ponto médio do seguimento $\overline{V_1V_2}$.

Figura 23: Hipérbole arbitrária



Fonte: Venturi (1949, p. 93, adaptação nossa)

Uma equação reduzida da hipérbole pode ser obtida ao fixar seus focos no eixo Ox do sistema de coordenadas cartesianas. Faz-se $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ de modo que o centro O coincida com a origem do sistema. Da **Definição 3** percebe-se que

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

De modo análogo ao procedimento para reduzir a equação da elipse, considerando

$c^2 = a^2 + b^2$, tem-se

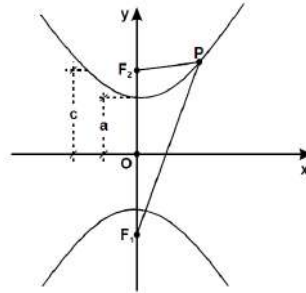
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

Outra equação pode ser obtida fixando os focos F_1 e F_2 no eixo Oy , que resulta em

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Vale evidenciar que a hipérbole definida pela Equação (8) possui abertura leste-oeste, já a Equação (9) define uma hipérbole de abertura norte-sul como vemos na Figura 24. Outra observação é que na elipse sempre $a \geq b$, já na hipérbole é possível ocorrer $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.

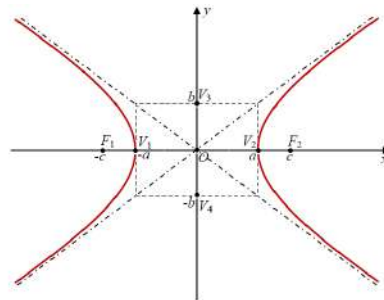
Figura 24: Hipérbole de abertura norte-sul



Fonte: Venturi (1949, p. 94)

Dos conceitos vistos, é perceptível que uma hipérbole compreende duas curvas desconectadas, chamadas de “braços”, que isolam os focos. Conforme a distância dos pontos da hipérbole aos focos aumenta, a hipérbole começa a se aproximar de outras duas retas, nomeadas assíntotas.

Figura 25: Hipérbole e suas assíntotas



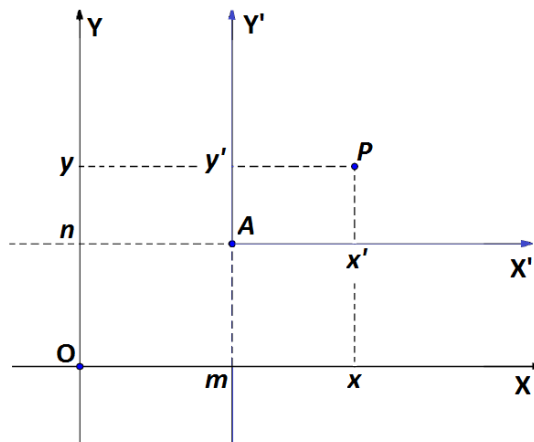
Fonte: Correia (2013, p. 42, adaptação nossa)

As assíntotas da hipérbole são retas suportes das diagonais do retângulo determinado pelas retas paralelas aos eixos da hipérbole passando pelos pontos V_1 , V_2 , V_3 e V_4 .

4.4 Translação de eixos

Até aqui foram vistas somente as equações reduzidas com base na origem do plano cartesiano. Caso as cônicas possuam eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados como acontece na hipérbole e elipse; ou vértice fora da origem, mas diretriz paralela a um dos eixos coordenados, no caso da parábola, o recurso de translação de eixos auxilia a escrever outras equações.

Figura 26: Plano cartesiano e eixos auxiliares



Fonte: Silva (2013, p. 24, adaptação nossa)

Tal processo refere-se a uma mudança de coordenadas, tomando o ponto $A(m, n)$ como a nova origem do plano. Nota-se que um ponto $P(x, y)$ passa a ter novas coordenadas $P(x', y')$ tais que

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases} \quad (10)$$

daí, no lugar de x e y das equações vistas, pode-se fazer a substituição x' e y' respectivamente para representar as cônicas.

Fora os casos acima citados, também existe a rotação de eixos para representar as cônicas rotacionadas. Não exploraremos tal assunto aqui, para saber mais consulte o capítulo 3 de (CAMPOLINO, 2014).

4.5 Praticando

1) Determinar a equação reduzida da parábola com vértice na origem e foco $F(3, 0)$ do plano cartesiano e fazer um esboço gráfico da mesma.

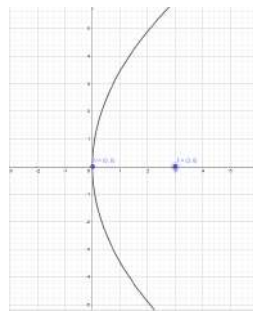
Identifica-se que o o eixo focal pertencente à Ox , e sua concavidade é para a direita, já que a abscissa do foco é positiva. Daí, sua equação genérica é do tipo Equação 1, onde p corresponde a abscissa do foco, pois $V(0,0)$. Assim, $p = 3$. Fazendo as substituições:

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4 \cdot 3 \cdot x$$

Logo, a parábola tem equação $y^2 = 12x$, e gráfico:

Figura 27: Parábola com equação $y^2 = 12x$



Fonte: produção própria

2) Encontre a equação da parábola que tem foco no ponto $F(1, 3)$ e reta diretriz com equação $r : y = -2$. Esboce o gráfico.

Neste caso percebe-se que o eixo focal é paralelo ao eixo Oy , e sua concavidade é para cima. Como o vértice pertence à diretriz, é evidente que V não se encontra na origem do plano cartesiano, sendo necessária a utilização da translação de eixos.

Façamos a nova origem do plano o ponto $V(1, -2)$. Pelas fórmulas de translação, $m = 1$ e $n = -2$, daí as coordenadas do ponto V no plano original serão:

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - (-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

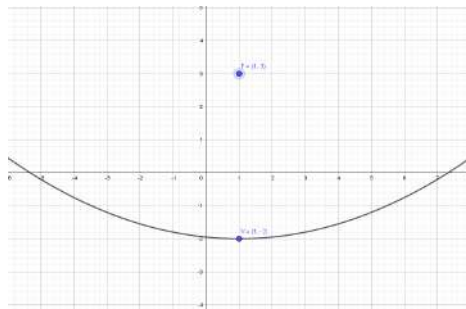
Das condições dadas, a parábola tem Equação 3, com x e y substituídos por x' e y' ,

já que seu vértice está fora da origem. Como p é a distância do foco à diretriz, $p = 3 - (-2) \rightarrow p = 5$. Assim:

$$\begin{aligned}x'^2 &= 4py' \\(x - 1)^2 &= 4 \cdot 5(y + 2)\end{aligned}$$

Logo, a parábola tem equação $(x - 1)^2 = 20(y + 2)$, e gráfico:

Figura 28: Parábola com equação $(x - 1)^2 = 20(y + 2)$



Fonte: produção própria

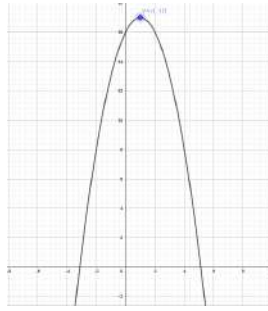
3) A equação $x^2 - 2x + y - 16 = 0$ representa uma parábola. Identifique as coordenadas do vértice e direção da concavidade. Esboce o gráfico.

Para melhor identificar a parábola e deixar sua equação na forma reduzida, utilize-se o método de completar quadrados. Assim sendo:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + y - 16 &= 0 \\(x - 1)^2 + y &= 16 + 1 \\(x - 1)^2 &= -y + 17 \\(x - 1)^2 &= -1(y - 17)\end{aligned}$$

Comparando a equação obtida com a Equação 4, a parábola possui concavidade para baixo e vértice fora da origem, sendo x substituído por $x' = x - 1$ e y substituído por $y' = y - 17$. Das fórmulas de translação, identifica-se $m = 1$ e $n = 17$, portanto seu vértice possui coordenadas $V(1, 17)$.

Figura 29: Parábola com equação $x^2 - 2x + y - 16 = 0$



Fonte: produção própria

4) Identifique a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ e esboce seu gráfico.

Também ao completar quadrados e fazer manipulações convenientes:

$$\begin{aligned}
 9x^2 - 36x + 25y^2 + 50y &= 164 \\
 9(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) &= 164 \\
 9[(x - 2)^2 - 4] + 25[(y + 1)^2 - 1] &= 164 \\
 9(x - 2)^2 - 36 + 25(y + 1)^2 - 25 &= 164 \\
 9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 &= 225 \\
 \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} &= 1 \\
 \frac{(x - 2)^2}{5^2} + \frac{(y + 1)^2}{3^2} &= 1
 \end{aligned}$$

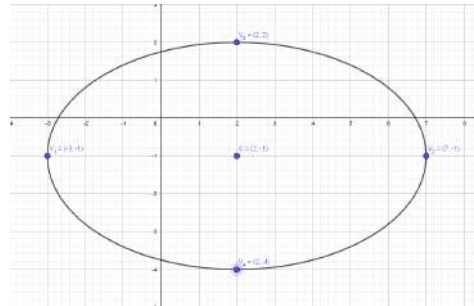
Ao reduzir a equação, vê-se que é uma **elipse**, já que possui os termos x e y ao quadrado, bem como uma adição das frações. Como na elipse sempre $a \geq b$, identifica-se o semi-eixo maior paralelo ao eixo Ox com medida $a = 5$, e o semi-eixo menor paralelo ao eixo Oy com medida $b = 3$ (maior valor é denominador de x^2 e menor valor é denominador de y^2). Pelos numeradores percebe-se que seu centro é fora da origem, identificando $x' = x - 2$ e $y' = y + 1$ daí, $m = 2$ e $n = -1$, e as coordenadas do centro $C(2, -1)$.

Sendo o centro $C(2, -1)$, adiciona-se o valor de a em sua abscissa para encontrar a coordenada do vértice V_2 , logo $V_2(2 + 5, -1)$, daí $V_2(7, -1)$. Para encontrar as coordenadas do vértice V_1 é subtraído o valor de a na abscissa do centro, assim $V_1(2 - 5, -1)$, daí $V_1(-3, -1)$.

Para encontrar V_3 , adiciona-se o valor de b na ordenada do centro, logo $V_3(2, -1 + 3)$, daí $V_3(2, 2)$. Já para as coordenadas do vértice V_4 , basta subtrair o valor de b na ordenada do

centro, logo $V_4(2, -1 - 3)$, daí $V_4(2, -4)$. Com os elementos principais da elipse identificados, o esboço do gráfico torna-se mais simples de ser feito:

Figura 30: Elipse com equação $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$



Fonte: produção própria

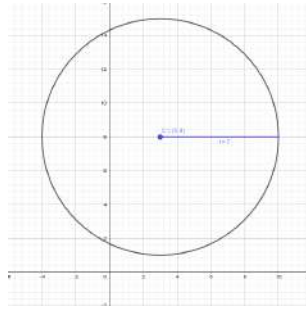
5) Determinar o centro da elipse $x^2 + y^2 - 6x - 16y = -24$ e medidas dos semi-eixos maior e menor. Esboçar o gráfico.

Utiliza-se o método de completar quadrados para encontrar a forma reduzida da equação:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 16y &= -24 \\ (x - 3)^2 - 9 + (y - 8)^2 - 64 &= -24 \\ (x - 3)^2 + (y - 8)^2 &= -24 + 9 + 64 \\ (x - 3)^2 + (y - 8)^2 &= 49 \\ \frac{(x - 3)^2}{49} + \frac{(y - 8)^2}{49} &= 1 \\ \frac{(x - 3)^2}{7^2} + \frac{(y - 8)^2}{7^2} &= 1 \end{aligned}$$

Ao apresentar sua forma reduzida, é visto que seu centro é deslocado, identifica-se $x' = x - 3$ e $y' = y - 8$, daí $m = 3$ e $n = 8$, sendo $C(3, 8)$ o centro da elipse. Também é visto que as medidas do semi-eixo maior a e e semi-eixo menor b são iguais a 7. Por essa característica, identifica-se tal elipse como uma **circunferência** de raio 7.

Figura 31: Circunferência com equação $x^2 + y^2 - 6x - 16y = -24$



Fonte: produção própria

6) Qual a distância focal e coordenadas do centro, focos e vértices da elipse de equação $3x^2 + 4y^2 = 36$? Esboce o gráfico.

Lembra-se que a distância focal equivale a $2c$, pelas considerações do **tratamento analítico da elipse**. Também vale lembrar a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Para encontrar o valor de c , identifica-se a^2 e b^2 reduzindo a equação ao dividi-la por 36:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Assim, $a^2 = 12$ e $b^2 = 9$. Podendo substituir no Teorema de Pitágoras:

$$12 = 9 + c^2$$

$$c^2 = 12 - 9$$

$$c^2 = 3$$

$$c = \sqrt{3}$$

Sendo $c = \sqrt{3}$, a distância focal da elipse é $2\sqrt{3}$. Pela equação reduzida identifica-se que seu centro possui coordenadas $O(0, 0)$, ao ser comparada a Equação 6.

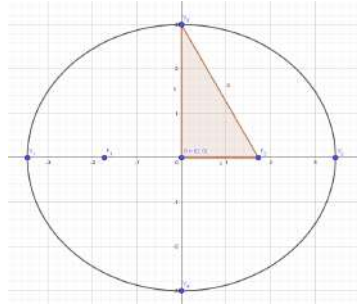
Pode-se encontrar as coordenadas do foco F_1 ao subtrair o valor de c na abscissa do centro, logo $F_1(-\sqrt{3}, 0)$. Encontra-se as coordenadas do foco F_2 ao adicionar o valor de c na abscissa do centro, daí $F_2(\sqrt{3}, 0)$.

Encontra-se as coordenadas do vértice V_1 ao subtrair a da abscissa do centro. Como $a^2 = 12$, tem-se $a = 2\sqrt{3}$. Logo $V_1(-2\sqrt{3}, 0)$. As coordenadas de V_2 são obtidas ao adicionar a a abscissa do centro, logo $V_2(2\sqrt{3}, 0)$.

Encontra-se as coordenadas do vértice V_3 ao adicionar o valor de b na ordenada do centro. Como $b^2 = 9$, $b = 3$ daí, $V_3(0, 3)$. Ao subtrair b da ordenada do centro tem-se $V_4(0, -3)$.

Com essas informações se constrói o gráfico:

Figura 32: Elipse com equação $3x^2 + 4y^2 = 36$



Fonte: produção própria

7) Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$, cujo o eixo focal mede 4. Esboçar o gráfico.

A partir das coordenadas dos focos, vê-se que o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ coincide com a origem do plano cartesiano, sendo este o centro da hipérbole. Como o eixo focal pertence ao eixo Ox , a hipérbole será do tipo Equação 8.

Já que o eixo focal $2a = 4$, tem-se $a = 2$. $2c$ é a distância entre os focos, daí:

$$\begin{aligned} 2c &= d(F_1, F_2) \\ 2c &= \sqrt{(3 - (-3))^2 + (0 - 0)^2} \\ 2c &= \sqrt{6^2} \\ 2c &= 6 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Da relação $c^2 = a^2 + b^2$:

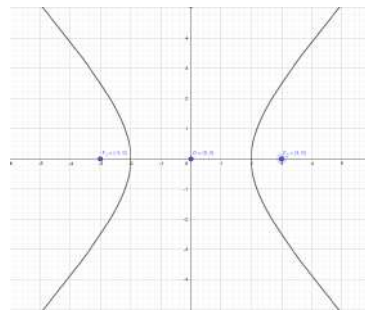
$$\begin{aligned} 3^2 &= 2^2 + b^2 \\ 9 &= 4 + b^2 \\ b^2 &= 9 - 4 \\ b^2 &= 5 \end{aligned}$$

Como a hipérbole possui centro na origem, eixo focal leste-oeste, $a^2 = 4$ e $b^2 = 5$,

sua equação é:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Figura 33: Hipérbole com equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$



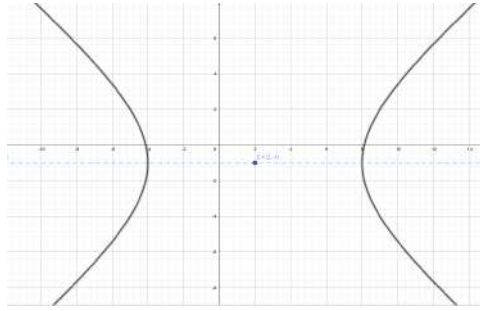
Fonte: produção própria

8) Identificar a cônica de equação $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$ e fazer um esboço de seu gráfico.

$$\begin{aligned} 25x^2 - 100x - 36y^2 - 72y &= 836 \\ 25(x^2 - 4x) - 36(y^2 + 2y) &= 836 \\ 25[(x - 2)^2 - 4] - 36[(y + 1)^2 - 1] &= 836 \\ 25(x - 2)^2 - 100 - 36(y + 1)^2 + 36 &= 836 \\ 25(x - 2)^2 - 36(y + 1)^2 &= 900 \\ \frac{(x - 2)^2}{36} - \frac{(y + 1)^2}{25} &= 1 \\ \frac{(x - 2)^2}{6^2} - \frac{(y + 1)^2}{5^2} &= 1 \end{aligned}$$

Ao observar a subtração das frações, percebe-se que a equação refere-se a uma **hipérbole** de centro $C(2, -1)$.

Figura 34: Hipérbole com equação $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$



Fonte: produção própria

9) Qual a equação reduzida da hipérbole que possui focos $F_1(0, -10)$ e $F_2(0, 10)$ e eixo transversal com medida 12? Esboce o gráfico.

Pelas coordenadas dos focos identifica-se que o ponto médio do eixo focal é a origem do plano cartesiano, portanto a hipérbole tem centro $O(0, 0)$. Também identifica-se $c = 10$, e como o eixo transversal possui medida $2b = 12$, tem-se que $b = 6$. Assim:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$10^2 = a^2 + 6^2$$

$$a^2 = 100 - 36$$

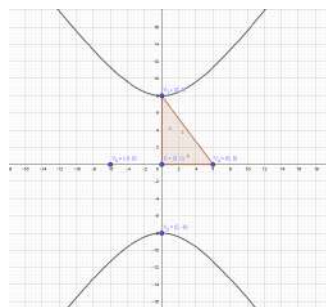
$$a^2 = 64$$

$$a = \sqrt{64}$$

$$a = 8$$

Com os valores de a e b , a partir do centro da hipérbole encontra-se seus vértices $V_1(0, 8)$ $V_2(0, -8)$ $V_3(-6, 0)$ $V_4(6, 0)$. Identifica-se que a curva possui equação $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$. Assim, se esboça o gráfico:

Figura 35: Hipérbole com equação $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$



Fonte: produção própria

5 EXCENTRICIDADE

A excentricidade é um parâmetro comum a todas as cônicas, sua característica consiste em comensurar o desvio ou deformação da curva em relação a uma circunferência. Matematicamente a excentricidade é definida como a razão constante das distâncias de um ponto P movendo-se ao longo da cônica a um ponto fixo (foco) e a uma reta fixa (diretriz), e é representada por e . Tal razão é um aspecto definidor de uma secção cônica. Com base em Correia (2013), veja a definição foco-diretriz:

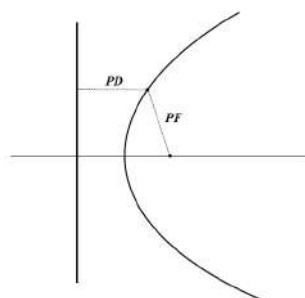
Definição 4. *No plano, dados uma reta r , um ponto F não pertencente a ela e um número positivo e , seja $D \in r$ tal que PD representa a distância de um ponto P a r . O conjunto de todos os pontos P verificando a relação*

$$PF = ePD \quad (11)$$

diz-se uma secção cônica com excentricidade e .

5.1 Parábola

Figura 36: Distância entre P , o foco e a diretriz



Fonte: Gaspar (2014, p. 32, adaptação nossa)

Da **Definição 1** temos que $PF = PD$, fazendo tal substituição na Equação (11) vem:

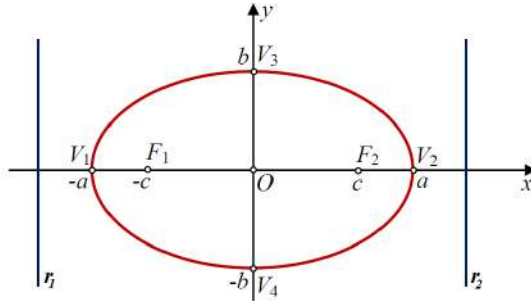
$$PD = ePD$$

Ao dividir ambos os lados por PD , chegamos a conclusão que a excentricidade da parábola é uma constante bem definida:

$$e = 1 \quad (12)$$

5.2 Elipse

Figura 37: Elipse e suas diretrizes r_1 e r_2



Fonte: Correia (2013, p. 39, adaptação nossa)

As diretrizes da elipse são definidas como retas perpendiculares à reta que contém os focos, e a uma distância $\frac{a}{e}$ do centro. Considerando uma elipse cujo centro é a origem do plano cartesiano, com focos pertencentes ao eixo Ox e a equação de uma de suas diretrizes sendo $r : x = \frac{a}{e}$, pela Equação (6), isolando y^2 :

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2x}{a^2} \quad (13)$$

Desenvolvendo a Equação (11) por tais considerações:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= e \left(\frac{a}{e} - x \right) \\ \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 &= (a - ex)^2 \end{aligned}$$

Ao desenvolver os quadrados e substituir y^2 da Equação (13):

$$x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = a^2 - 2aex + e^2x^2$$

Subtraindo $e^2x^2 + a^2$ em ambos os lados e lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$:

$$x^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - e^2x^2 = 2cx - 2aex$$

Ao colocar x em evidência e dividir por x :

$$\left(\frac{a^2 - b^2 - e^2a^2}{a^2} \right) x = 2(c - ae)$$

Se $\frac{a^2 - b^2 - e^2 a^2}{a^2} = 0$, então $c - ae = 0$. Sendo $c^2 = a^2 - b^2$, para isso:

$$\begin{aligned}\frac{c^2 - e^2 a^2}{a^2} &= 0 \\ c^2 &= e^2 a^2 \\ e^2 &= \frac{c^2}{a^2}\end{aligned}$$

Como a e c são positivos, $e = \frac{c}{a}$. Verificando para $c - ae = 0$, temos $ae = c$.

Portanto a excentricidade da elipse é dada pela razão

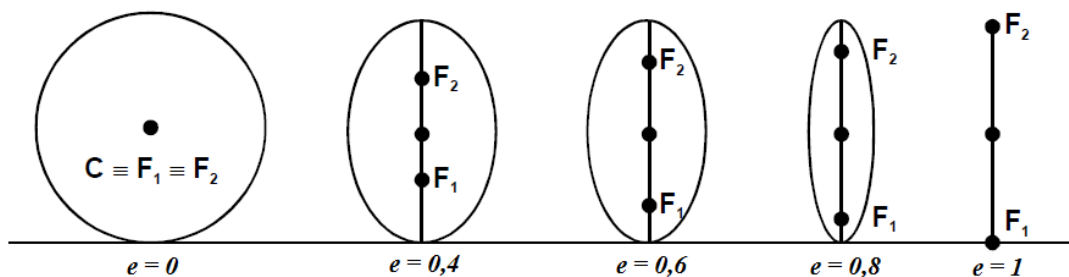
$$e = \frac{c}{a}. \quad (14)$$

A mesma expressão pode ser obtida considerando outras equações da elipse, de modo similar ao procedimento acima. Considerando que na elipse sempre $a > c$,

$$0 \leq e < 1 \quad (15)$$

Caso ocorra $c = 0$, ou seja, o foco coincide com o centro da elipse, tem-se uma circunferência cuja excentricidade $e = 0$. Daí, é possível ver que quanto mais perto de 0 a excentricidade estiver, mais a elipse se parecerá com uma circunferência e se ela tiver um valor próximo de 1 terá aparência mais “achatada”.

Figura 38: Comparação entre diferentes excentricidades de elipses

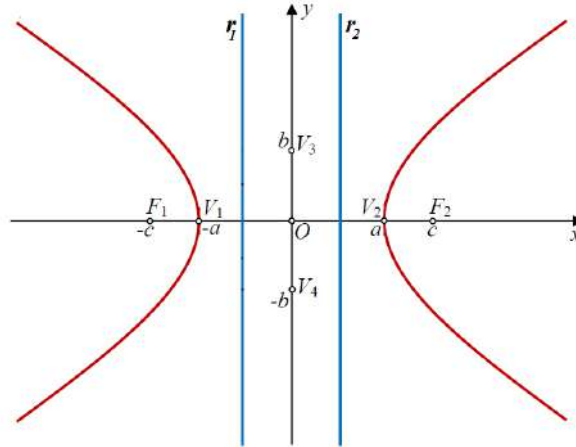


Fonte: Venturi (1949, p. 70, adaptação nossa)

Se ainda dentro da definição de elipse fossemos considerar $c = a$, teríamos $e = 1$, o que formaria um segmento de reta que podemos chamar também de **elipse degenerada**.

5.3 Hipérbole

Figura 39: Hipérbole e suas diretrizes r_1 e r_2



Fonte: Correia (2013, p. 42, adaptação nossa)

Assim como na elipse, as diretrizes da hipérbole são definidas como retas perpendiculares à reta que contém os focos, e a uma distância $\frac{a}{e}$ do centro. Considerando uma hipérbole cujo centro coincide com a origem do sistema cartesiano, seus focos estejam sobre o eixo Ox , e a equação de uma de suas diretrizes seja $r : x = \frac{a}{e}$, pela Equação 8, isolando y^2 :

$$y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 \quad (16)$$

Desenvolvendo a Equação (11) por tais considerações:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = e \left(x - \frac{a}{e} \right)$$

Fazendo as substituições necessárias e processo similar ao subcapítulo anterior, também chega-se a conclusão que a excentricidade da hipérbole é definida por

$$e = \frac{c}{a} \quad (17)$$

A característica da excentricidade da hipérbole vem de que sempre $c > a$, consequentemente

$$e > 1 \quad (18)$$

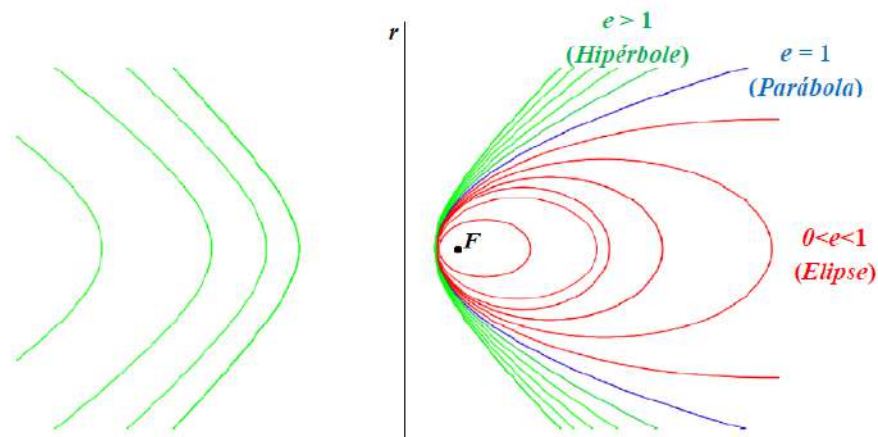
6 DEFINIÇÃO UNIFICADA E EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS

A partir dos conceitos vistos no capítulo anterior, as cônicas podem ser definidas de maneira unificada:

Definição 5. *Sejam r uma reta chamada diretriz e um ponto F chamado foco, tal que $F \notin r$. Uma cônica C define-se por todos os pontos P tais que $\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = e$. Sendo d a distância euclidiana. Se $0 \leq e < 1$, a cônica chama-se elipse. Se $e = 1$, recebe o nome de parábola. Sendo $e > 1$ obtém-se uma hipérbole.*

É possível notar que “uma vez fixada uma reta e um ponto não pertencente a ela, determina-se uma única parábola de excentricidade 1. Para a elipse e a hipérbole tem-se uma família de curvas” (LOPES, 2011, p. 116). Veja na Figura 40 tal representação:

Figura 40: Excentricidade e o formato das cônicas



Fonte: Correia (2013, p. 31)

Adotando um sistema cartesiano ortonormado de coordenadas xOy , e considerando um ponto $P(x, y)$, o ponto $F(x_0, y_0)$ para o foco, a reta $r : ax + by + c = 0$ para a diretriz e a constante $e \geq 0$ para a excentricidade, de acordo com a **Definição 5**:

$$\frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = e$$

Ao desenvolver a equação:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} &= \frac{e}{\sqrt{a^2 + b^2}} |ax + by + c| \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= \frac{e^2}{a^2 + b^2} (ax + by + c)^2 \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= (kax + kby + kc)^2, \text{ com } k^2 = \frac{e^2}{a^2 + b^2} \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= (px + py + r)^2, \text{ com } \begin{cases} p = ka \\ q = kb \\ r = kc \end{cases}\end{aligned}$$

Fazendo algumas adaptações, a equação cartesiana geral das cônicas é do tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (19)$$

Sendo:

$$\begin{cases} A = 1 - p^2 \\ B = -2pq \\ C = 1 - q^2 \\ D = -2(x_0 + pr) \\ E = -2(y_0 + qr) \\ F = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases}$$

Tal equação pode representar elipses, parábolas e hipérbolas, degeneradas ou não, a depender de seus coeficientes. No geral, o indicador $\Delta = B^2 - 4AC$ determina que tipo de cônica está representada:

- $\Delta < 0$, temos uma elipse ou o conjunto vazio;
- $\Delta = 0$, temos uma hipérbole ou um par de retas concorrentes;
- $\Delta > 0$, temos uma parábola ou um par de retas concorrentes ou o conjunto vazio.

Não é o foco neste momento nos ater as demonstrações destas, mas a ideia é resolver a equação para uma das variáveis. Isolando ou x ou y chega-se em uma expressão que

muito lembra a solução de uma equação do segundo grau estudada no ensino básico, com a famosa “fórmula de Bhaskara”, onde também existe um discriminante. No caso da Equação (19) tal discriminante é analisado e a partir dele é obtido o indicador Δ de cônica. Para saber mais consulte o Capítulo 2 de (CORREIA, 2013).

7 QUÁDRICAS

As cônicas já haviam sido estudadas com bastante afinco, e as grandes contribuições da ciência vieram através de Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga, entretanto, ainda não dispunham de uma notação algébrica adequada. Progredindo com a álgebra, Pierre de Fermat concluiu seu manuscrito *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos) em 1629, revolucionando a matemática geométrica e a geometria analítica.

O “Príncipe dos amadores”, como assim era chamado Fermat, teve a percepção da geometria analítica de três dimensões: “Se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície.” (VENTURI, 1949, p. 161).

A explanação a respeito das superfícies quádricas que representam problemas deste tipo é necessária para perceber com mais apreço onde as cônicas se encaixam no mundo tangível. Tal assunto é muito vasto, ainda assim mostraremos efêmeramente, com intuito de abrir os olhos do leitor para mais possibilidades além das mencionadas aqui.

Numa abordagem simples, as quádricas são regiões formadas quando as cônicas se movimentam no espaço. Esferas, paraboloides, elipsoides, hiperboloides, cilindros e cones são as mais conhecidas superfícies desta classe. Assim como as cônicas, suas equações também podem representar quádricas degeneradas, como pares de planos, pontos ou conjuntos vazios. A caracterização dessas superfícies como lugar geométrico do espaço (\mathbb{R}^3) é análoga a das cônicas.

Definição 6. *Sejam π um plano do espaço, F um ponto não pertencente ao plano π e e um número real positivo. A superfície S de foco F , diretriz π e excentricidade e é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\frac{d(P, F)}{d(P, \pi)} = e$ é chamada *Quádrica*.*

De maneira aproximada ao desenvolvimento da Equação Geral (19) das cônicas, pela **Definição 6** determina-se a equação cartesiana geral das quádricas, o tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (20)$$

sendo pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F diferente de zero e todos os coeficientes pertencentes a \mathbb{R} .

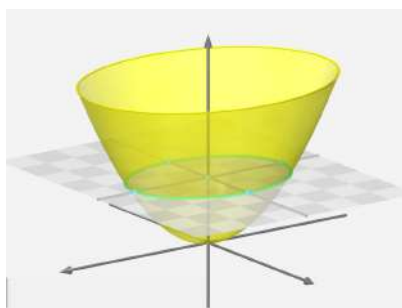
7.1 Parabolóide

7.1.1 Parabolóide elíptico

Possui equações reduzidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \quad (21)$$

Figura 41: Parabolóide elíptico seccionado



Fonte: Docplayer (2019)

Suas secções verticais correspondem a parábolas, e horizontais correspondem a elipses; se por acaso tais secções forem circunferências, chama-se parabolóide circular. As quádricas representadas por tais equações apenas tocam os eixos coordenados no ponto de origem $O(0, 0, 0)$, sendo ele seu vértice.

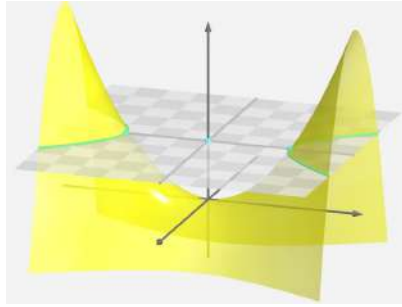
7.1.2 Parabolóide hiperbólico

Possui equações reduzidas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by \quad (22)$$

Suas secções verticais correspondem a parábolas, e horizontais correspondem a hipérbolas. As quádricas representadas por tais equações apenas tocam os eixos coordenados no ponto de origem $O(0, 0, 0)$, sendo ele seu vértice.

Figura 42: Paraboloide hiperbólico seccionado



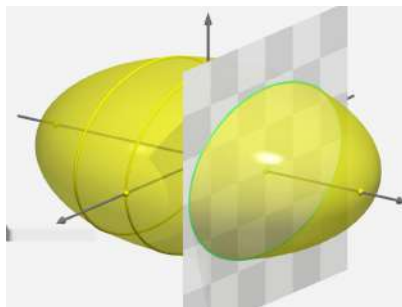
Fonte: Docplayer (2019)

7.2 Elipsoide

Possui equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (23)$$

Figura 43: Elipsoide seccionado



Fonte: Docplayer (2019)

Ao ser seccionado por um plano, obtêm-se sempre elipses. As quádricas representadas por tais equações apenas tocam os eixos coordenados em seis pontos. Tais elipsoides são simétricos em relação a todos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Um caso particular é uma esfera de raio R , obtida quando $a = b = c = R$.

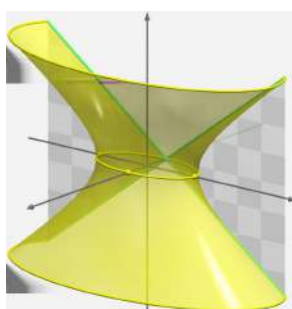
7.3 Hiperboloide

7.3.1 Hiperboloide de uma folha

Possui equações reduzidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (24)$$

Figura 44: Hiperboloide de uma folha seccionado



Fonte: Docplayer (2019)

Suas secções verticais correspondem a hipérboles, e horizontais correspondem a elipses; se por acaso tais secções forem circunferências, chama-se hiperboloide circular de uma folha. As quádricas representadas por tais equações tocam os eixos coordenados em 4 pontos. O hiperboloide é simétrico em relação a todos os planos coordenados, aos eixos coordenados e a origem.

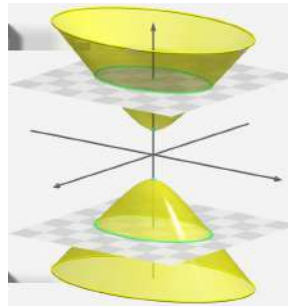
7.3.2 Hiperboloide de duas folhas

Possui equações reduzidas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (25)$$

Suas secções verticais correspondem a hipérboles, e horizontais correspondem a elipses; se por acaso tais secções forem circunferências, chama-se hiperboloide circular de duas folhas. O hiperboloide é simétrico em relação a todos planos coordenados, aos eixos coordenados e a origem. Uma quádrica representada por uma destas equações toca apenas um dos eixos coordenados em 2 pontos.

Figura 45: Hiperboloide de duas folhas seccionado



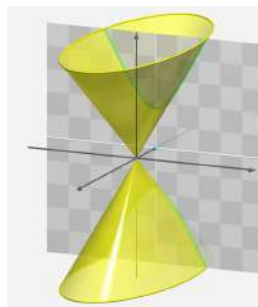
Fonte: Docplayer (2019)

7.4 Cone elíptico

Possui equações reduzidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (26)$$

Figura 46: Cone elíptico seccionado



Fonte: Docplayer (2019)

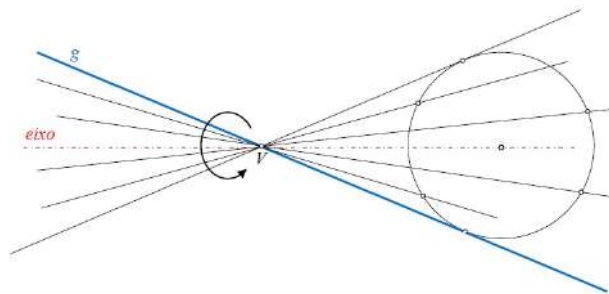
Estas equações são simétricas em relação a todos os planos coordenados, eixos coordenados e a origem. As quádricas representadas por tais equações apenas tocam os eixos coordenados no ponto de origem $O(0, 0, 0)$. Tal superfície é conhecida também como cone de duas folhas ou cone duplo. A partir deste tipo de cone pode se definir todas as cônicas estudadas neste trabalho, apenas variando o plano secante.

8 CONE DUPLO E AS CÔNICAS

A primeira pessoa a estudá-lo foi Apolônio de Perga, que antes da geometria analítica definiu-o como:

Definição 7. Uma reta g passa por um ponto fixo V , move-se ao longo da circunferência de um círculo não coplanar com o ponto V . Deste movimento resultam duas superfícies verticalmente opostas, uma em relação a outra. O ponto fixo V é chamado vértice e a reta g , geratriz. A reta que passa por V e pelo centro do círculo denomina-se eixo. Tais elementos determinam um cone duplo.

Figura 47: Concepção de um cone duplo

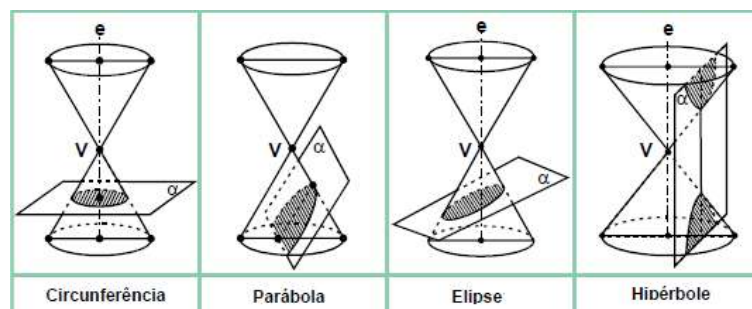


Fonte: Correia (2013, p. 9, adaptação nossa)

Veja como se obtêm as cônicas quando a secção se dá de forma a não passar pelo vértice V (cônicas não degeneradas):

- Parábola: o plano secante é paralelo a uma geratriz do cone;
- Elipse: o plano secante não é paralelo a geratriz e corta somente uma das duas folhas do cone;
- Hipérbole: o plano secante não é paralelo a geratriz e corta ambas as folhas do cone.

Figura 48: Cônicas a partir do cone de duas folhas

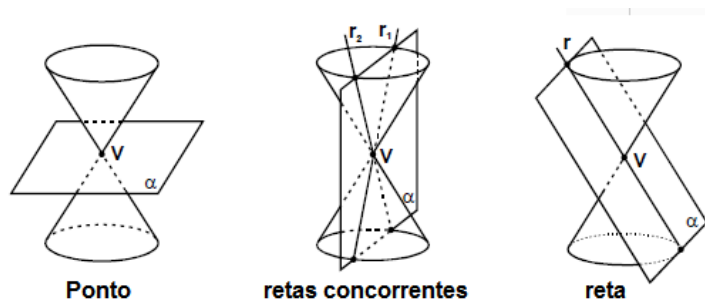


Venturi (1949, p. 115 , adaptação nossa)

As cônicas chamadas degeneradas acontecem no cone quando o plano secante passa por seu vértice:

- Parábola degenerada: reta - o plano secante tangencia o cone;
- Elipse degenerada: ponto - o plano secante e o cone apenas possuem o vértice V em comum;
- Hipérbole degenerada: par de retas concorrentes - o plano secante contém o vértice e duas geratrizes do cone.

Figura 49: Cônicas degeneradas a partir do cone de duas folhas

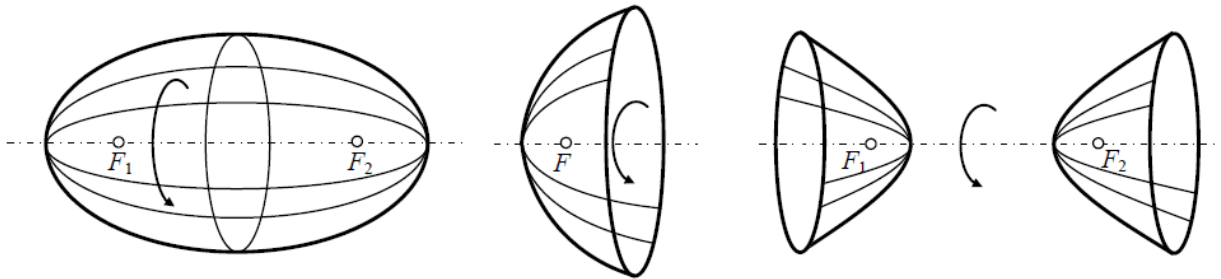


Fonte: Venturi (1949, p. 136 , adaptação nossa)

9 PROPRIEDADE REFLETORA

A maioria das aplicações de secções cônicas e superfícies quádricas se dá por sua característica refletora, muito útil para experimentos físicos, químicos e aplicações tecnológicas. Tais características também são chamadas propriedades focais, que estão associadas as leis de reflexão. Como vivemos num mundo caracterizado por três dimensões, as experiências observadas que relacionam a reflexividade e as cônicas envolvem também as quádricas de revolução, resultantes da rotação dos três tipos de cônicas em torno dos respectivos eixos (CORREIA, 2013).

Figura 50: Quádricas de revolução



Fonte: Correia (2013, p. 103)

Segundo as leis da física clássica, os raios de luz e as ondas sonoras propagam-se no espaço em linha reta e radialmente a partir de sua fonte. Além disso, se a fonte está muito distante de seu destino, essas ondas chegam ao destino formando um feixe praticamente paralelo, como é o caso das ondas de rádio ou as luminosas provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planetas, etc.). (CORREIA, 2013, p. 103)

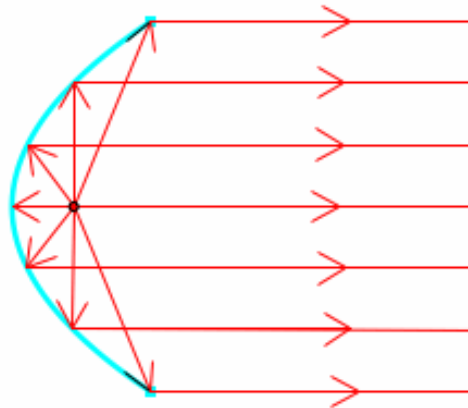
Sabendo disso, será apresentado qual o efeito óptico é produzido por uma cônica (ou superfície). Para a dedução das leis matemáticas que regem tais efeitos, veja as seções 2.2, 3.2 e 4.2 de (GONÇALVES, 2014). Ressalta-se que as proposições se referem aos raios de luz, mas podem ser estendidas para qualquer energia associada a processos ondulatórios, a radiação infravermelha ou qualquer outra forma de radiação eletromagnética, o som e outras formas de ondas de pressão (CÔNICAS, 2019).

9.1 Parábola

Tendo como base a monografia de Chung (2013), seguem os enunciados:

Proposição 1. *Um raio emitido de uma fonte luminosa situada no foco de um espelho em formato de parabolóide é refletido paralelamente ao eixo de simetria do mesmo.*

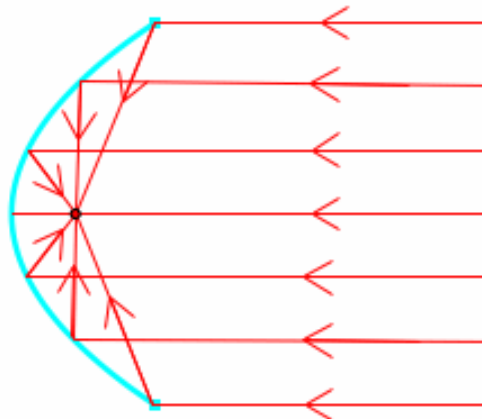
Figura 51: Representação da Proposição 1



Fonte: Wisdom (2019)

Proposição 2. *Um feixe de luz que incide paralelamente ao eixo de simetria de um refletor parabólico de revolução, com origem na região interior onde se localiza o foco, terá seus raios refletidos e convergidos para o foco do parabolóide.*

Figura 52: Representação da Proposição 2

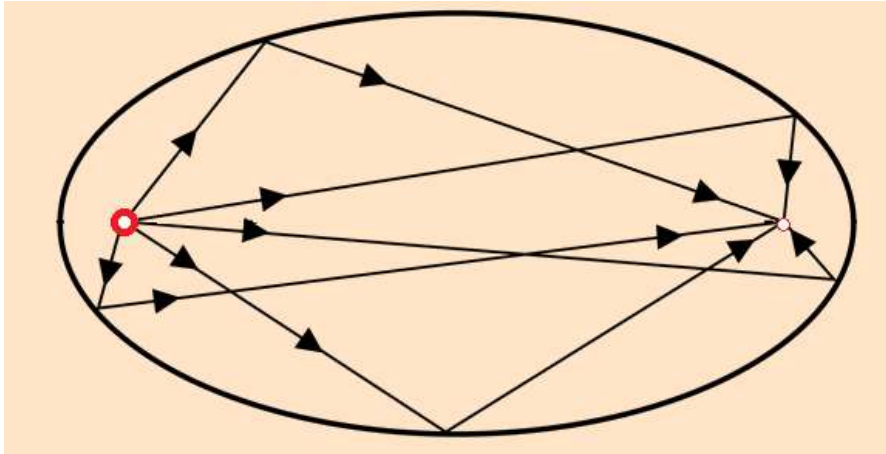


Fonte: Wisdom (2019)

9.2 Elipse

Proposição 3. *Se uma fonte de luz estiver situada em um dos focos de um espelho elíptico, todos os raios refletidos por este espelho se concentrarão no outro foco.*

Figura 53: Representação da Proposição 3

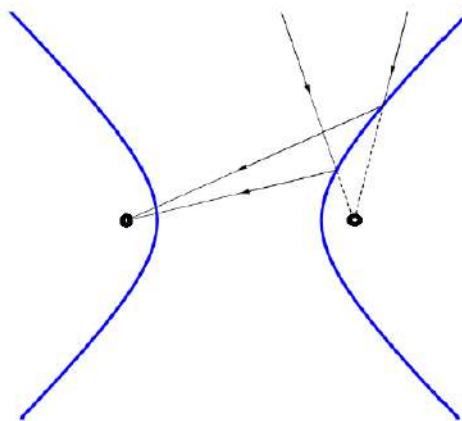


Fonte: Nave (2019)

9.3 Hipérbole

Proposição 4. *Se a luz for dirigida a um dos focos de um espelho hiperbólico será refletida em direção ao outro foco.*

Figura 54: Representação da Proposição 4



Fonte: Correia (2013, p.104)

10 ETIMOLOGIA

Neste capítulo abordaremos um pouco sobre a origem e evolução das palavras utilizadas para representar as cônicas. Conforme diz Nunes e Votto (2018, p. 593):

A fim de auxiliar no ensino e aprendizado da terminologia científica, sugerimos a utilização do estudo etimológico desses termos. Com isso, os estudantes podem apreciar a lógica por trás das formações da terminologia que parece pouco compreensível. Além disso, ao elaborar esse tipo de estudo, é perceptível a relação da similaridade de significados que os termos apresentam, formando redes que possibilitam um ensino significativo.

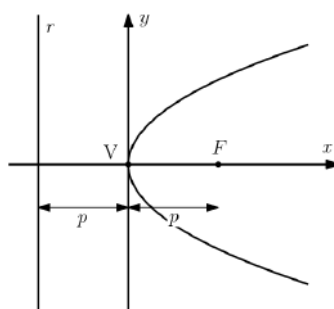
A maioria das palavras utilizadas na Matemática (do grego, μαθηματική) provém do latim, grego e árabe. De acordo com Venturi (1949, p. 230) “as palavras **parábola**, **elipse** e **hipérbole** foram inicialmente empregadas pelos pitagóricos e por Arquimedes, mas com outra acepção. Utilizavam-nas na solução de equações do 2º grau por aplicação de áreas.”.

10.1 Parábola

Vem da palavra grega παραβολή, que romanizada fica *parabole*. Este termo é composto da junção de *para*, que significa “lado” e *baillen*, “jogar”. Sua tradução pode ser tida como “comparação”. Analisando seu sentido, parábola é algo que serve de comparação entre duas ou mais coisas dispostas uma ao lado da outra.

Devido a comparação existente na equação $y^2 = 2px$, sendo p o parâmetro, a curva estabelecida por tal igualdade é chamada de parábola. Também vale a expressão $y^2 = \ell x$, sendo $\ell = 2p$ o comprimento da sua corda focal mínima.

No Português parábola é uma figura de linguagem, e assim ficaram conhecidas as histórias que Jesus Cristo contava. “Normalmente eram histórias de cunho moral, que serviam de **comparação** com determinada situação da vida real.” (DICIONARIOETIMOLOGICO, 2019, grifo nosso).

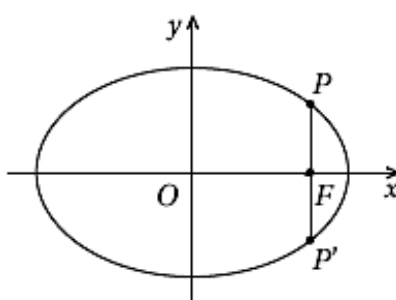
Figura 55: Parâmetro p da parábola

Fonte: Matika (2019b)

10.2 Elipse

Vem da palavra grega ἔλλειψις, que romanizada fica *elleipsis*. Significa “defeito”, “falta”; segundo Figurasdelinguagem (2019) a palavra se originou dos estudos de astronomia, quando se acreditava que as órbitas planetárias eram circulares. Pelos cálculos que partiam desta hipótese não darem certo, as órbitas foram chamadas de elipses, uma imagem que se aproxima de um círculo, mas falta algo.

A partir da equação da elipse vista no **Tratamento Analítico** chega-se a inequação $y^2 < lx$, sendo l o comprimento da corda focal mínima (*latus rectum*); daí vale dizer que ainda **falta** para se chegar em uma igualdade.

Figura 56: *Latus rectum* da elipse

Fonte: produção própria

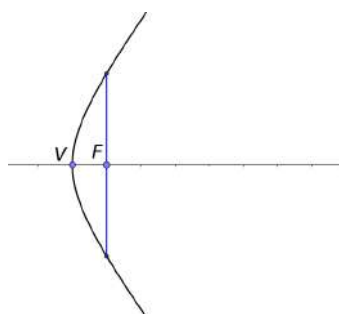
No Português elipse é uma figura de linguagem, e é classificada como uma das figuras de sintaxe. “Consiste na **omissão** de um ou mais termos numa oração que podem ser facilmente identificados, tanto por elementos gramaticais presentes na própria oração, quanto pelo contexto.” (SOPORTUGUES, 2019).

10.3 Hipérbole

Vem da palavra grega υπερβολή, que romanizada fica *hyperbolē*. Este termo é composto da junção de *hiper* que significa “por cima”, “sobre”, “além” e *bolē*, que assim como *baillen* tem sentido de “jogar” ou “lançar”. Sua tradução pode ser tida como “ato de lançar além”. Analisando seu sentido, hipérbole é determinada como “exagero”.

A partir da equação da hipérbole vista no **Tratamento Analítico** chega-se a inequação $y^2 > \ell x$, sendo ℓ o comprimento da *latus rectum*; daí vale dizer que “[...] o quadrado y^2 é maior que (**excesso** em relação a igualdade) que o retângulo ℓx .” (VENTURI, 1949, p. 232).

Figura 57: *Latus rectum* da hipérbole



Fonte: produção própria

No Português hipérbole é uma figura de linguagem classificada com figura de pensamento. É um recurso linguístico capaz de aumentar a expressividade do texto. “incide quando há **exagero** propositado em um conceito para definir algo de forma dramática, transmitindo uma ideia aumentada do autêntico.” (WIKIPEDIA, 2019b, grifo nosso).

10.4 Foco

Vem do latim *Focus*, e significa “lareira”, “fogo”. Foi usado por Johannes Kepler (1571 - 1630) em 1604 para descrever um ponto de convergência, no sentido matemático, em analogia com o ponto em que a proximidade dos raios de luz que passam por uma lente podem incendiar certos materiais.

11 OCORRÊNCIAS E APLICAÇÕES

De acordo com Souza (2014), justificar a matemática pelas aplicações práticas viabiliza grande impacto na percepção dos alunos em relação à própria matemática teórica. Ademais, segundo Lüdke (1994), “[...] a prática não se restringe ao fazer, ela se constitui numa atividade de reflexão que enriquece a teoria que lhe deu suporte.”, conforme citado por Pereira (2005, p. 39).

Acredita-se que trabalhar com os discentes o campo real das abstrações matemáticas possa levá-los a maior interesse pela matéria lecionada, bem como estimular a curiosidade pelas ciências que desvendam o Cosmos. Neste capítulo veremos algumas das aplicabilidades relacionadas às cônicas.

11.1 Parábola

11.1.1 Um pouco de história

Arquimedes foi um matemático que viveu no século III a.C., e naquele tempo o império romano estava em vasta expansão territorial. Durante a Segunda Guerra Púnica, ver (SÁNCHEZ; RAMÓN, 1975), suas tropas dominaram Siracusa, uma região que era muito importante geopoliticamente na Sicília, quando as defesas da cidade falharam durante uma festa religiosa. Arquimedes era engenheiro e colaborava com a segurança da pólis com suas engenhocas como sistema de roldanas, catapultas, ganchos e espelhos que refletiam raios solares (MOHNSAM, 2014).

Reza a lenda que Arquimedes construiu um espelho parabólico e usou a propriedade refletora das parábolas para queimar barcos inimigos, já que ele era responsável pela defesa fluvial e terrestre. Se a estória é verídica ou não, ainda não sabe-se dizer, porém o experimento é possível se o barco estiver parado. De acordo com Santos e Renato (2016):

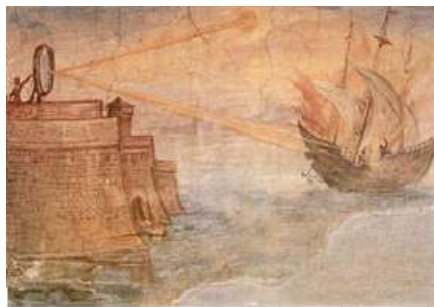
[...]o sistema era formado por vários pequenos espelhos planos quadrados que podiam ser apontados de forma a convergir para um ponto, como uma lente convergente ou um espelho parabólico, do tipo usado em fornos solares, sendo assim capaz de reduzir a cinzas um navio que estivesse à distância de um tiro de flecha.

Figura 58: O “Raio da Morte” de Arquimedes



Fonte: Lincolins (2019)

Figura 59: Raio de calor



Fonte: Parigi (1594)

11.1.2 Pontes de suspensão

A equação de um cabo flexível e inextensível, fixo em dois apoios e sujeito somente ao próprio peso foi estudado pela primeira vez no século XVII. Nesta análise, Galileu Galilei (1564-1642) chegou a conclusão de que a equação parabólica simula este sistema, porém somente em 1690 foi comprovado que a curva catenária, $y = a \cosh \frac{x}{a}$, representa melhor o problema proposto, quando David Gregory escreveu um artigo a este respeito (MARTINS, 2009).

Figura 60: Ponte de Manhattan - Estados Unidos



Fonte: Art.com (2019)

Os primeiros exemplos modernos desse tipo de ponte, também chamada de Ponte Pênsil (Figura 60) na qual há um cabo de aço principal e os cabos verticais, os quais se ligam perpendicularmente a parte de suporte de carga, foram construídos no início do século XIX e garantem um ótimo sistema de dispersão de energia. As pontes suspensas são ideais para locais com grande fluxo de embarcações, por admitirem a possibilidade de grandes vãos.

Em 1794 o engenheiro Fuss, enquanto projetava uma ponte suspensa, descobriu que se o peso do cabo fosse assumido como distribuído no comprimento do vão em vez de ao longo do comprimento do cabo, obtém-se a equação de forma de um cabo inextensível sujeito apenas à carga uniformemente distribuída do tabuleiro aproximada a uma parábola (MARTINS, 2009).

Assim, para esta análise, o peso dos cabos e dos pendurais é desprezado, considerando apenas para o cálculo o peso próprio do tabuleiro que aparece como uma carga uniformemente distribuída, e com os conhecimentos de Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas à Física, conduz a $z = \frac{4h}{L^2}x^2$, sendo h a altura do cabo em relação ao referencial quando intersecta o pilar.

Figura 61: Ponte George Washington



Fonte: Wave (2019)

Concluindo a ideia, do ponto de vista físico, a catenária é a aproximação mais precisa para a construção deste tipo de ponte, entretanto a fim de facilitar os cálculos, os engenheiros civis utilizam a modelagem parabólica, fazendo as considerações acima citadas. Existem

muitas variáveis, como a necessidade de cabos elásticos e a ação do vento, que levam a outras equações, porém de forma geral é possível ver uma utilização dos estudos das parábolas.

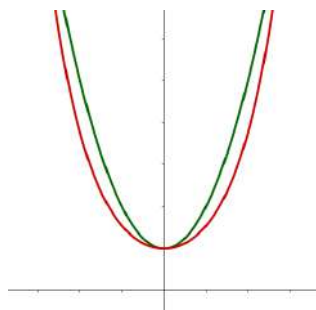
A ponte pênsil mais longa é a Akashi Kaikyō, que liga a cidade de Kobe a Ilha de Awaji no Japão. Esta ponte tem comprimento total de 3.911 metros e vão de 1.991 metros, e “[...] foi construída para cruzar um perigoso canal que antes ficava amontoado de balsas e foi local de trágicos naufrágios em dias de tempestade.” (PETCIVIL, 2019).

Figura 62: A maior ponte suspensa do mundo: Akashi Kaikyō - Japão



Fonte: Kim (2005)

Figura 63: Comparação entre a catenária (vermelha) e a parábola (verde)



Fonte: Produção Própria

11.1.3 Forno solar

Em 1970 Nicholas de Saussurre descreveu os primeiros experimentos com fornos solares, com o objetivo de preparar alimentos. Este tipo de construção tem a propriedade de refletir os raios que incidem sobre sua superfície.

Existem vários tipos de fornos solares, mas focaremos nos parabólicos. Neles, a luz que incidir paralelamente ao plano que o espelho está localizado será refletida passando no foco, e quanto maior o espelho, maior será a quantidade de luz que incidirá no foco.

O maior forno solar do mundo está localizado em Odeillo, na França, e começou

a operar em 1970. Ele possui 54 metros de altura e 48 metros de largura, composto por 63 heliostatos, sendo 9500 espelhos e tendo potência de 1 megawatt. O funcionamento do espelho envolve os conceitos de ótica geométrica.

Figura 64: Forno solar parabólico



(a) Fonte: Íkaros (2012)



(b) Fonte: Wikipedia (2011)

O formato côncavo da parede disposta com uma série de espelhos planos forma um enorme espelho côncavo. A fornalha de Odeillo está localizada justamente no foco para receber a maior quantidade possível de incidência luminosa, que esquenta sua superfície com temperaturas muito grandes, podendo atingir até 3800° celsius. O gigante forno solar serve como base de pesquisa científica a respeito de altas temperaturas.

Figura 65: Maior forno solar do mundo: Odeillo - França



(a) Fonte: Theymadethat (2019)



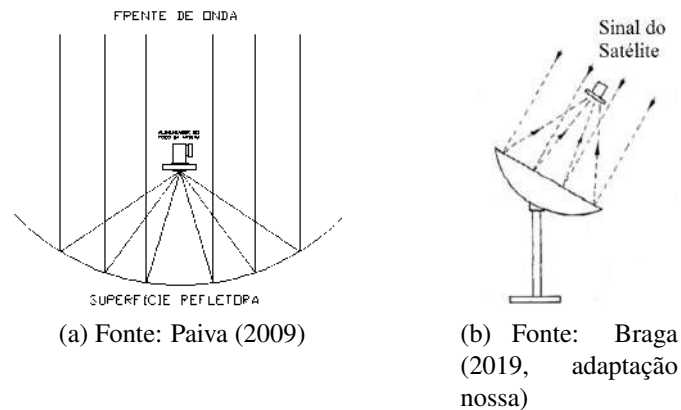
(b) Fonte: Sharma (2018)

11.1.4 Antena parabólica

As antenas parabólicas são objetos bastante utilizados na comunicação atual, através de transmissão via satélite, telefonia móvel e Global Positioning System (GPS) – sistema

de radionavegação baseado em satélites. Têm o mesmo princípio de funcionamento do forno solar parabólico, porém seu objetivo é refletir as ondas eletromagnéticas que chegam até ela; praticamente qualquer superfície de metal pode servir como refletor. Em seu ponto focal há um alimentador, que possui a função de captar os sinais recebidos dos satélites.

Figura 66: Princípio de funcionamento da antena parabólica



Os sinais de satélite são muito fracos quando eles viajam mais de 35 mil quilômetros até o prato da antena. A parte seccionada do parabolóide de revolução funciona como uma lente, concentrando o máximo de sinal possível no alimentador, que amplifica esse sinal e o envia pelo cabo.

Figura 67: Antena parabólica



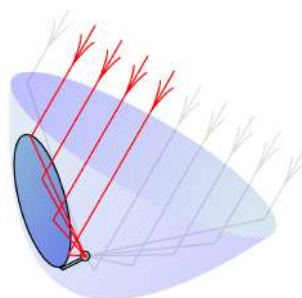
Fonte: Freepik (2019)

Se você já teve o sinal do seu programa de televisão interrompido durante uma tempestade, geralmente é porque a chuva que atinge a antena faz com que o sinal coletado seja difuso, portanto, o sinal total que a antena capta não é suficiente para o aparelho televisor fazer seu trabalho e há falha em manter a imagem intacta.

Na Figura 68 pode-se observar a geometria da antena parabólica tipo *offset*. O

prato é um segmento assimétrico de um parabolóide; o vértice do parabolóide está abaixo da borda inferior do prato. O eixo do feixe, que é direcionado para o satélite, passa pelo vértice e pelo foco, de modo que a antena de alimentação no foco fica fora do feixe.

Figura 68: Parabolóide de revolução seccionado

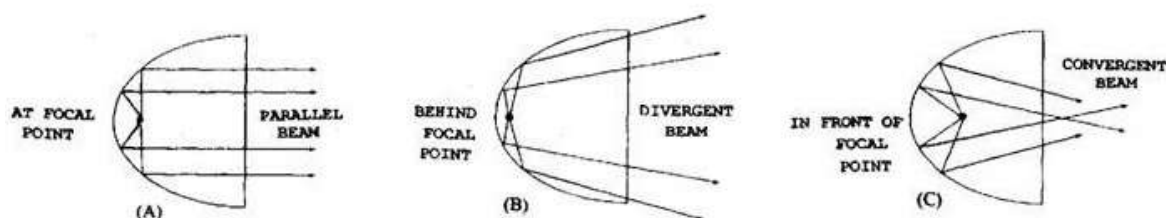


Fonte: Wikipedia (2019a)

11.1.5 Dispositivos de iluminação

Alguns dispositivos de iluminação como faróis de carros, holofotes e lanternas, possuem na sua estrutura um emissor de luz localizado no foco de um parabolóide, voltado para um espelho parabólico localizado no fundo do objeto. De acordo com os conceitos vistos no capítulo **Propriedade Refletora**, esta superfície reflete os raios luminosos de forma paralela ao eixo da parábola, fazendo com que a luz seja propositalmente direcionada (CERQUEIRA, 2015).

Figura 69: Posição do emissor de luz e raios refletidos



Fonte: Kainam (2013)

Na Figura 69 observa-se que o modelo A tem o emissor localizado no foco, consequentemente os raios são refletidos paralelamente ao eixo. No modelo B o emissor é colocado

antes do foco, mais próximo do vértice da parábola, o que faz com que os raios sejam refletidos de forma divergente, enquanto no modelo C o emissor se encontra após o foco, mais afastado do vértice, e neste caso os raios são refletidos de forma convergente. Tais modelos parabólicos são muito eficazes para o funcionamento do farol automotivo, com suas diferentes funcionalidades para cada tipo de situação.

11.1.6 Curiosidades: outras ocorrências das parábolas

- Tocha olímpica

Alguns meses antes de cada realização dos Jogos Olímpicos, a chama é ateadada em Olímpia - Grécia, frente às ruínas do templo de Hera, numa cerimônia que visa recriar o método usado na antiguidade e que se destinava a garantir a pureza da chama: atrizes representando sacerdotisas de Héstia (deusa do fogo na mitologia grega) colocam uma tocha no foco de um espelho parabólico e assim se acende a chama que marca o início da edição olímpica.

Figura 70: Acendendo a tocha olímpica



Fonte: Orestis (2004)

- Outras áreas de estudo

“Na **Economia** e na **Administração**, os segmentos pertencentes ao primeiro quadrante de vários tipos de parábolas são frequentemente apropriadas para representar funções de demanda e oferta, funções de produção e muitas outras relações.” (OLIVEIRA; PAULA, 2009, p. 37). Nos estudos de resistência dos materiais da **Engenharia Civil**, vigas biapoiadas sujeitas à carga uniformemente distribuída possuem o diagrama do seu momento fletor na forma de uma parábola. Em **estudos balísticos**, quando um projétil é lançado, sujeito apenas a força da gravidade, é descrita uma trajetória parabólica.

11.2 Elipse

11.2.1 Mecânica celeste

É o ramo da Astronomia que estuda a dinâmica dos corpos sob interação gravitacional; sua origem vem das civilizações da antiguidade clássica, como os babilônios, egípcios e gregos, que possuíam a necessidade de descrever os movimentos dos astros, visando principalmente a elaboração de calendários (VOLCHAN, 2007) para identificar as épocas de plantio e colheita.

Em meados do século *XVI*, o matemático e astrônomo Nicolau Copérnico (1473–1543) apresentou um modelo de interação heliocêntrica, em que o Sol situava-se em repouso no centro do universo, e os planetas descreviam órbitas circulares ao seu redor. Inclusive, o *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, livro em que suas teorias apresentavam-se, entrou na lista dos proibidos pela Igreja da época por gerar grande polêmica.

Figura 71: Heliocentrismo de Copérnico - 1543



Fonte: Ptak (2010)

Johannes Kepler (1571–1630), matemático e astrônomo alemão, analisou por cerca de 17 anos dados tabelados e anotações relativos a rigorosas observações planetárias feitas por seu mestre Tycho Brahe (1546–1601); conseguindo formatar três leis que regem o movimento planetário, hoje intituladas Leis de Kepler. É aí que a elipse se encaixa nessa história toda.

O primeiro telescópio para observação astronômica foi construído por Galileu Ga-

lilei (1564 – 1642), e com ele a Astronomia teve grande desenvolvimento. A partir de suas observações Galileu passou a apoiar a teoria de Copérnico e em 1632 divulgou um livro a respeito do tema, sendo obrigado pela Igreja a renunciar suas ideias lendo uma confissão em voz alta perante o Santo Conselho.

Figura 72: Lunetas astronômicas de Galileu



Fonte: lelivrescolaire (2019)

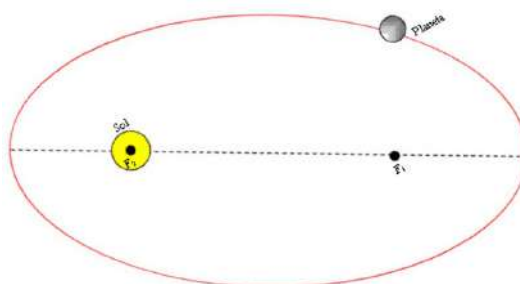
Fundamentado por Kepler e Galileu, o famoso matemático, físico e astrônomo inglês Isaac Newton (1642–1727) determinou a expressão matemática da força de atração entre o Sol e um planeta após estruturar os princípios da Mecânica. “A partir deste momento tornou-se possível o cálculo exato das órbitas e movimento da lua e dos demais planetas, dos seus satélites e cometas.” (LOPES, 2011, p.143).

- Primeira Lei de Kepler

Conhecida como Lei das órbitas, afirma que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que está localizado em um dos focos da elipse.

No caso do planeta Terra, conforme Astronoo (2013) a excentricidade elíptica varia entre 0 e 0,06 por cada 100 mil anos, por conseguinte muitas vezes sua órbita é considerada uma circunferência. O planeta do Sistema Solar com maior excentricidade é Mercúrio com aproximadamente 0,2. Os demais planetas também têm trajetória orbital considerada uma circunferência. Vale lembrar que a circunferência é um caso particular de elipse.

Figura 73: Órbita elíptica em torno do Sol



Fonte: sofisica (2019)

Nesta parte foi apresentado um pouco da história da Mecânica Celeste e como a elipse se encaixa nesses estudos. É possível encontrá-la na equação que define a trajetória planetária, mas para mostrá-la precisaríamos defini-la em coordenadas polares e aprofundar os conhecimentos de Física e Equações Diferenciais Ordinárias. Para examinar a respeito deste assunto consulte o Subcapítulo 8.4 e o Capítulo 10 de (LOPES, 2011). As outras Leis de Kepler não serão explanadas para não haver dispersão do tema Cônicas.

11.2.2 Elipsoide de referência

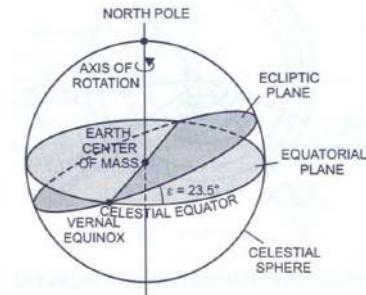
Será percorrido um pouco sobre engenharia cartográfica, mais especificamente sobre a Geodésia, ciência que estuda as dimensões, forma e o campo de gravidade da Terra, permitindo analisar, medir e representar o espaço geográfico do planeta com precisão. De acordo com Smith, conforme citado por Dalazoana (2016b, p. 7):

A irregularidade da superfície terrestre traz muitas dificuldades na realização de cálculos matemáticos sobre tal superfície. Para fins práticos torna-se necessário encontrar um modelo representativo da superfície física da Terra.

Ainda segundo Dalazoana (2016b), um modelo matematicamente viável para tal representação é o de um elipsoide de revolução, usualmente definido por dois parâmetros: o semi-eixo maior a , e o semi-eixo menor b , sendo o achatamento $f = \frac{a - b}{a}$. Com a evolução das ciências, vários elipsoides biaxiais com parâmetros cada vez mais aprimorados serviram de modelo para a superfície da Terra. A associação dos parâmetros geométricos e parâmetros

físicos do campo gravitacional terrestre colaborou para maior precisão das representações.

Figura 74: Elipsóide de referência e seus componentes

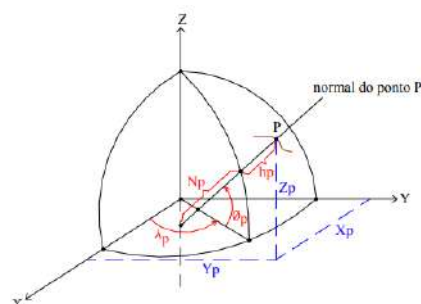


Fonte: Dalazoana (2016a)

O principal uso dos elipsoides de referência é servir de base para um sistema de coordenadas de latitude (norte/sul), longitude (leste/oeste) e elevação (altura). É possível que diferentes sistemas de coordenadas sejam definidos sobre o mesmo elipsoide de referência, eles são chamados de Sistema Geodésico de referência (SGR). As definições de coordenadas geodésicas de um ponto qualquer P na superfície do elipsoide são:

- A latitude geodésica é o ângulo contado sobre o meridiano que passa por P, compreendido entre a normal passante por P e o plano equatorial.
- A longitude geodésica é o ângulo contado sobre o plano equatorial, compreendido entre o meridiano de Greenwich e o ponto P.
- A altitude elipsoidal corresponde a distância de P à superfície do elipsóide medida sobre a sua normal.

Figura 75: Coordenadas geodésicas e cartesianas do ponto P



Fonte: Dalazoana (2016b, p.12)

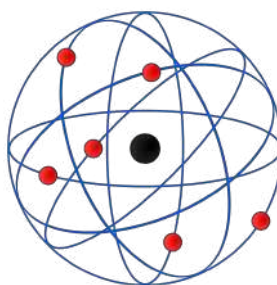
O *Global Positioning System* (GPS) utiliza da modelagem elipsoidal chamada *World Geodetic System* 1984 (WGS84) para gerar seu sistema de navegação. Para ver mais a respeito das coordenadas geodésicas e suas transformações para coordenadas cartesianas, consulte (DALAZOANA, 2016b, p. 12).

11.2.3 Modelo Atômico

Partindo para um escala bem menor aos nossos olhos, tem-se o estudo dos átomos feito pela Física e também pela Química. Em 1808, John Dalton (1766 – 1844) propôs a teoria do modelo atômico comumente chamado de Bola de Bilhar, alegando que o átomo é uma minúscula esfera maciça, impenetrável, indestrutível, indivisível e sem cargas elétricas. Aí já podemos perceber a participação do elipsóide, e seu caso específico chamado esfera.

Em 1897, ao descobrir uma partícula ainda menor que qualquer átomo, o elétron, Joseph Thomson (1856 – 1940) alavancou os estudos da Física Quântica e Nuclear. Em 1911 Ernest Rutherford (1871 – 1937) desenvolveu sua teoria sobre a estrutura atômica após diversas experiências realizadas com a radioatividade do Urânio e espalhamento de partículas alfa, sendo esta a base do modelo atômico que propunha que elétrons orbitam circularmente em torno de um núcleo, ficando conhecida como Modelo Planetário.

Figura 76: Modelo atômico de Rutherford



Fonte: Wikipedia (2007)

No ano de 1920, o físico dinamarquês Niels Bohr (1885 – 1962) unificou a teoria atômica de Rutherford e a teoria da mecânica quântica de Max Planck (1858 - 1947) através de sua ideia de que os elétrons deveriam girar em torno de um núcleo central em órbitas específicas com níveis energizados, e com seus estudos concluiu que a organização orbital era bem definida.

O modelo do átomo de Bohr explica bem o comportamento do átomo de hidrogênio e do átomo de hélio ionizado, entretanto é insuficiente para átomos com mais de um elétron, sendo deixado de lado em 1925. Procurando dar maior generalização a teoria de Bohr, Arnold Sommerfeld (1868 – 1951) concedeu aos elétrons maior liberdade, permitindo a estes se moverem não só em órbitas circulares, mas também em órbitas elípticas, com intuito de explicar o caso de átomos mais complicados.

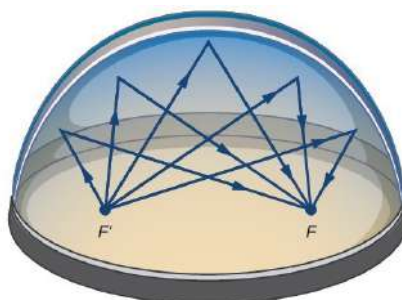
Nos dias atuais, o modelo planetário, quer seja o de Bohr, quer seja o de Sommerfeld não é mais aceito. Prefere-se pensar que os átomos são constituídos por um núcleo de carga elétrica positiva mergulhado numa nuvem de elétrons. Um elétron confinado no átomo não tem posição determinada. Sua posição é definida em termos probabilísticos. Ele não ocupa um lugar bem definido, mas um lugar onde é mais provável encontrá-lo.

Apesar dos modelos citados não serem aceitos na Física Moderna, eles foram importantes para o aperfeiçoamento da física atômica. Como pode-se observar, inicialmente ele não tinha estrutura alguma, e com o tempo novas propostas foram imaginadas, e os elétrons, prótons e nêutrons foram descobertos, além da existência do núcleo. Nota-se que todos os modelos criados até Sommerfeld envolvem as elipses.

11.2.4 Galeria de Sussurros

Uma galeria de sussurros é geralmente um recinto circular, hemisférico, elíptico ou elipsoidal, no qual os sussurros podem ser ouvidos claramente em outras partes da galeria devido às propriedades refletoras das cônicas. Essas galerias também podem ser montadas usando dois pratos parabólicos. As vezes, o fenômeno é detectado em cavernas.

Figura 77: Modelo de uma Sala de Sussurros



Fonte: lumenlearning (2014)

Um exemplo de galeria de sussurros é o *Statuary Hall*, uma câmara de forma elíptica localizada no Capitólio dos Estados Unidos, dedicada a esculturas de americanos proeminentes. Foi nesta sala que John Quincy Adams, enquanto um membro da Câmara dos Representantes, verificou um fenômeno acústico; situado na sua mesa em um ponto focal do teto elíptico, espiou facilmente as conversas privadas de outros membros da casa que estavam perto do outro ponto focal.

Figura 78: Statuary Hall



Fonte: Palmer (2014)

Outro exemplo é a *Whispering Wall*, na *Grand Central Terminal* em Nova Iorque.

Figura 79: Pessoas sussurando nas paredes da Grand Central Station



Fonte: Ramos (2013)

11.2.5 Medicina: Litropsia

Litropsia extracorpórea é uma técnica médica não invasiva para o tratamento de cálculos, sejam eles biliares, renais ou vesiculares. Seu objetivo é reduzir o tamanho dos cálculos por meio de esmagamento ou trituração, permitindo que o corpo expila de forma natural pelas vias adequadas.

O procedimento utiliza um aparelho litotriptor com refletor elíptico para emitir ondas de choque, ondas mecânicas de alta energia, que se propagam em meio líquido e penetram

no corpo do paciente em direção ao cálculo que se localiza em outro foco. A litropia extracorpórea revolucionou a terapêutica da calculose urinária, transformando-se rapidamente na maior inovação tecnológica para o tratamento desta doença.

Figura 80: Aparelho litotriptor



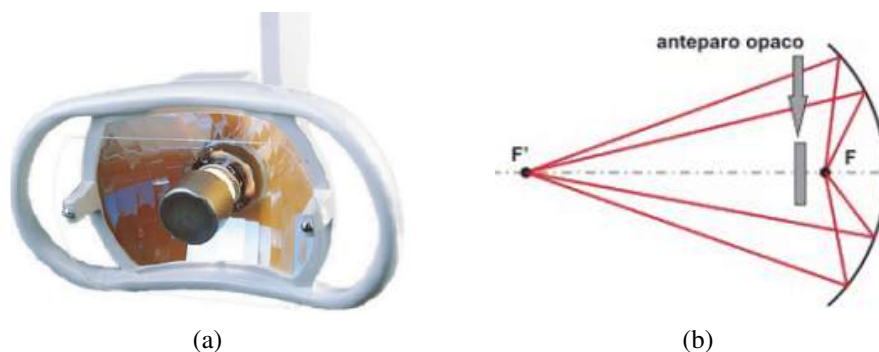
Fonte: Iuvicorpmedical (2018)

11.2.6 Curiosidades: outras ocorrências das elipses

- Refletor odontológico

Pode-se também observar a propriedade reflexiva das elipses nos refletores odontológicos. A luz da lâmpada é concentrada através do espelho no outro foco, que é ajustado pelo dentista para estar num ponto dentro da boca do paciente, com objetivo de concentrar o máximo de luz possível sem que cause desconforto em seus olhos.

Figura 81: Refletor odontológico e seu funcionamento



Fonte: Gonçalves (2014, p. 40)

- Outras ocorrências

Na administração “O uso das elipses ocorre quando se representa funções de transformação de produto” (OLIVEIRA; PAULA, 2009, p. 37). De acordo com Britton (1999) apesar da elipse não ser tão simples quanto o círculo, ela é a curva mais vista na vida cotidiana dada a razão de que um círculo visto oblíquo se torna uma elipse. Podemos admirá-la desde o contorno elíptico de um líquido num copo de água inclinado, passando pelo salame cortado de forma elíptica para ser visualmente maior e mais atrativo, até as órbitas planetárias.

Figura 82: Copo inclinado e elipse formada pelo líquido



Fonte: Romano (2012)

De acordo com Gaspar (2014), a elipse também pode ser encontrada em pontes de concreto e pedras pelos antigos romanos, cuja construção utilizava arcos em forma de uma semi-elipse. Ainda hoje a elipse de inércia é muito empregada na teoria de resistência de materiais na Engenharia Civil. Em Engenharia Elétrica, na teoria de correntes elétricas estacionárias se utiliza conjuntos de elipses de mesmo foco (elipses homofocais) e na Engenharia Mecânica engrenagens elípticas (excêntricas) são usadas.

11.3 Hipérbole

11.3.1 Telescópio de reflexão

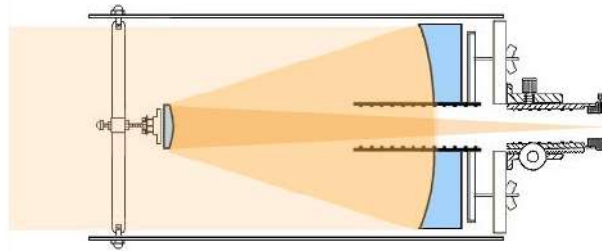
Um telescópio refletor é um telescópio óptico que usa uma combinação de espelhos curvos e planos para refletir a luz e formar uma imagem (WIKIPEDIA, 2019c). Seu maior objetivo é alcançar a visualização de objetos a longa distância e em diferentes comprimentos de onda de luz.

Existem vários tipos de telescópios de reflexão, a fim de corrigir erros e distorções das imagens obtidas, diminuindo possíveis interferências. Este tipo de telescópio é o mais

utilizado para a observação de corpos celestes e pesquisa astronômica. Veja o princípio de funcionamento do principal modelo que utiliza espelho hiperbólico em sua composição, o **Telescópio Cassegrain**:

O Cassegrain é composto por um espelho primário (maior) parabólico e um espelho

Figura 83: Esquema óptico do telescópio Cassegrain



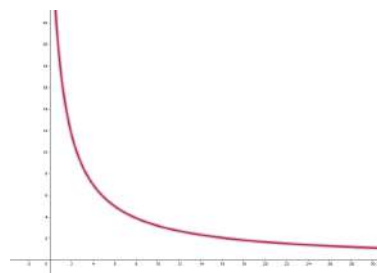
Fonte: telescopiosastronomicos (2018)

secundário (menor) de superfície hiperbólica, de maneira que seus eixos coincidam. Quando a luz incide no espelho primário ela é refletida para o foco da parábola, que também é foco da hipérbole, sendo refletida novamente a outro foco, passando por uma fenda no espelho parabólico onde se localiza uma lente ocular que permite corrigir a trajetória da luz que chega aos olhos do observador.

11.3.2 Administração e economia

De acordo com Oliveira e Paula (2009, p. 37) “O segmento pertencente ao primeiro quadrante de uma hipérbole equilátera é comumente usada para representar uma função de demanda.”. Um exemplo seria a equação $(x + 1) \cdot y = 35$, com o eixo focal não paralelo a um dos eixos coordenados, onde x e y representam quantidade e valor de cada mercadoria, respectivamente. Como ambos são positivos, analisa-se somente o primeiro quadrante do plano cartesiano.

Figura 84: Gráfico da função demanda



Fonte: produção própria

11.3.3 Avião Supersônico

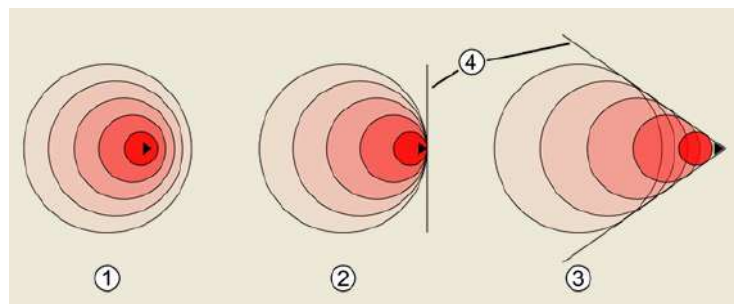
Um vôo supersônico é um grande feito da engenharia aeronáutica, e para compreendê-lo é preciso conhecer um pouco a respeito do som. O som viaja através de ondas, chamadas “ondas de pressão” que se expandem em velocidade constante e usam o ar como meio de propagação. Se um mesmo som é emitido no mesmo ponto em intervalos regulares, as ondas serão concêntricas. Isso ocorre com o avião, que é um emissor de som.

A velocidade de propagação dessas ondas é o que chamamos de velocidade do som. Ao nível do mar, em condições de atmosfera padrão, esta velocidade é de 1.226 km/h. Quando um avião se desloca numa velocidade igual a do som, por convenção ele está voando a “Mach 1”. Esta unidade é uma homenagem ao físico austríaco Ernst Mach (1838 – 1916) que pela primeira vez, mediu a velocidade de propagação do som no ar.

Quando qualquer objeto se desloca na atmosfera, o ar a sua volta é comprimido e são criadas ondas de pressão, principalmente a sua frente. Quando o avião atinge Mach 1, ele acompanha a velocidade de seu próprio som comprimindo o ar a sua frente, resultando em acúmulo de ondas em seu nariz.

A barreira sônica acontece quando se persiste na velocidade do som por algum tempo, pois as ondas se acumulam tanto que uma muralha de ar é formada à frente do avião, já que ele e o som viajariam juntos. Para continuar a viagem e evitar que a barreira aconteça é preciso ultrapassar Mach 1 rapidamente, e o vôo em velocidade mais rápida que o som é chamado vôo supersônico.

Figura 85: Ondas de pressão produzidas por um avião supersônico



Fonte: 33 (2014)

Tal vôo produz ondas de choque pois o ar é comprimido e sua pressão e densidade aumentam. Sua superfície gera um cone devido ao modo como as ondas se propagam, e é denominado Cone de Mach. Essas ondas são ouvidas como um forte estampido por um observador

em solo.

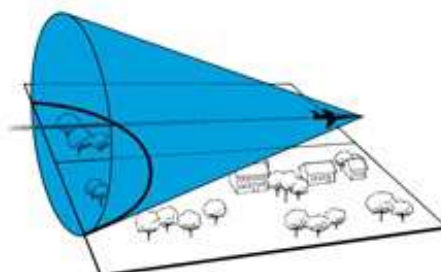
Figura 86: Avião supersônico e o cone de *Mach*



Fonte: 33 (2014)

Quando a trajetória da aeronave é uma reta paralela ao plano do solo, se produz uma secção cônica que já conhecemos como hipérbole. Tal curva é o limiar de audibilidade, ou seja, o limite entre a região onde o som da aeronave não é ouvido e a região onde o som é percebido.

Figura 87: Limiar de audibilidade



Fonte: Britton (1999, p. 5)

11.4 Outras ocorrências

Segundo Gaspar (2014), a Engenharia Civil utiliza o formato do hiperboloide de uma folha na construção de usinas atômicas. Também é possível visualizá-lo no projeto arquitetônico da Catedral de Brasília, feito por Oscar Niemayer. Na Química e Física, o gráfico que descreve a variação do volume de uma certa quantidade de gás quando varia sua pressão, isotermicamente, é um dos ramos da hipérbole equilátera.

12 DISPOSITIVO DIDÁTICO

A ideia é baseada no artigo *Generación de Cónicas Con Luz Láser*, ver (CYRULLIES, 2011). Nele o autor descreve o procedimento para gerar as curvas, que se dão por trajetórias luminosas obtidas por meio de um ponteiro laser. A engenhoca construída foi utilizada em dois institutos de formação docente em Buenos Aires na disciplina de Astronomia I, a fim de introduzir o tema de Órbitas. O executor relata que o método foi eficaz para propiciar melhor abstração a respeito do assunto.

Em paralelo à escrita da monografia, o dispositivo foi construído e aperfeiçoado com algumas alterações. O planejamento consistia em montar o dispositivo e testá-lo em sala de aula, sondando os resultados obtidos após tal intervenção e fazendo uma análise qualitativa da experiência, porém alguns contratempos surgiram durante a elaboração e devido ao calendário escolar tal experiência não pôde ser realizada em tempo hábil. Futuramente será elaborado um artigo científico tratando somente deste tema.

12.1 Princípio de funcionamento

O aparelho consiste em um triângulo isósceles (pode ser equilátero se preferir) cuja base é de madeira e os outros lados são de metal, montado numa estrutura que propicie seu giro em torno de um eixo central, formando assim um cone de revolução. Para harmonizar o giro e a velocidade faz-se necessário o uso de um motor. As secções cônicas são obtidas ao seccionar o cone por meio de luz laser que atravessa o tubo cilíndrico, que pelos efeitos de refração e difração da óptica proporciona algo bem similar a um plano (desprezando a espessura do feixe).

Ao fazer o plano de luz incidir nas hastes metálicas em rotação, por um dado momento haverá apenas duas zonas iluminadas, mas a persistência da retina faz uma linha contínua de luz ser vista se a velocidade de rotação é suficientemente alta. Tal efeito produz a circunferência, elipse, parábola ou hipérbole, a depender do ângulo em que a luz atinge o cone. Vale ressaltar que é conveniente escurecer o ambiente de experiência para melhor visualização.

Se não houver acesso a um tubo cilíndrico de vidro, um efeito muito semelhante é produzido ao utilizar a parte regular do tubo de uma caneta. Evidenciamos que a luz laser pode ser perigosa para os olhos se manejada de forma imprópria, por conseguinte recomendamos que a parede onde a luz incide de forma terminal seja preta, ou escura com material pobremente

refletor e a prática ocorra de forma em que a luz não acometa os olhos das pessoas ao redor.

12.2 Procedimento de construção

Peças utilizadas e material necessário:

- 01 - MDF 30 x 30 x 1,5 cm (base);
- 02 - MDF 10 x 30 x 1,5 cm (pés);
- 02 - MDF 10 x 27 x 1,5 cm (pés);
- 01 - MDF 4 x 3 x 30 cm (coluna);
- 01 - MDF 1 x 1 x 26 cm (base do triângulo);
- 01 - MDF 1 x 3 x 1 cm (apoio do vértice superior);
- 01 - Chapa de metal 1 x 0,3 x 20 cm (amparo superior);
- 02 - Hastes de metal, 36 cm de comprimento e 3 mm de diâmetro;
- 01 - Motor elétrico com cabo de alimentação;
- 01 - dimmer;
- 02 - Placas PVC 1 cm x 2,5 cm x 2 mm;
- Parafusos para montagem;
- 01 - Ponteiro laser de alta luminosidade (luz verde);
- Tinta matte na cor preta;
- 01 - tubo cilíndrico de vidro ou plástico transparente fino.

As peças descritas acima devem ser montadas de forma que a base seja a chapa maior, apoiada nos pés de modo a constituir uma caixa que proteja e deixe o motor e o dimmer embutidos, com um pequeno furo no centro para fixar a base do triângulo. Nela existem dois furos nas extremidades para firmar as hastes de metal. A coluna é fixada na extremidade da caixa, e em cima dela vai a chapa de metal com um furo que coincida com o eixo de rotação do motor, onde é colocado um parafuso fixo na chapa, porém que permita que o apoio do vértice superior do triângulo possa girar livremente.

No MDF do vértice superior também são fixadas as hastes de metal, e logo abaixo

as chapas de PVC são presas nas hastes de modo a estabilizá-las ao girar. Com tudo montado, é importante verificar se o aparelho está estabilizado para evitar que a luz se disperse de maneira indesejada e haja duplicação da imagem vista. A fim de minimizar os reflexos indesejados do laser, pinta-se o aparelho de preto matte, deixando apenas as hastes metálicas, que devem ser polidas com palha de aço.

12.3 Resultados

A utilização de tal recurso se dá pela importância da interpretação de desenhos geométricos e melhor visualização de informações advindas de um esquema gráfico, que está muito ligado com a vida ao nosso redor. A interpretação de informações visuais está cada vez mais presente em simples problemas do cotidiano como em problemas da astronomia, da engenharia, da arquitetura, da medicina, das artes, etc. (KALEFF; VOTTO; AZEVEDO, 2010).

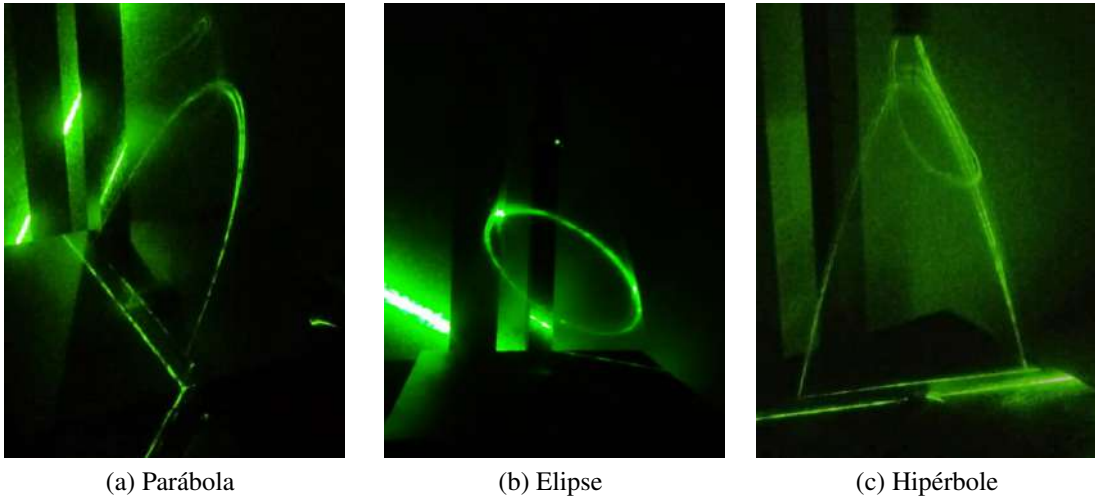
Figura 88: Dispositivo pronto



Fonte: Produção própria

Os resultados dos testes foram satisfatórios e empolgantes. Vale salientar que o professor deve frisar que as imagens visualizadas a partir do experimento são apenas a “ponta do iceberg”, já que o cone pode ser definido como cone duplo formado por uma reta geratriz, logo a parábola e a hipérbole prosseguem infinitamente no plano, tendo a hipérbole dois ramos.

Figura 89: Cônicas obtidas



Fonte: produção própria

12.4 Algumas considerações

Inicialmente, tentamos utilizar um motor pequeno, de uma caneca mixer, alimentado por duas pilhas, entretanto depois de algum tempo o motor não suportou o peso colocado sobre ele e seus rolamentos foram danificados. O motor agora definido para a engenhoca é de liquidificador, que por sinal é muito mais potente que o anterior. Quando o aparelho foi ligado as hastes “voaram”, saindo do lugar por não estarem estabilizadas o suficiente para a velocidade atingida. A estabilidade foi reforçada com pequenas placas em policloreto de vinila (PVC) para segurar as hastes, e novos parafusos.

Para atingir a velocidade ideal foi preciso adicionar um dimmer, que controla a intensidade da corrente elétrica, além de ligar o motor em um estabilizador de tensão, que contém um autotransformador que converte a tensão da tomada utilizada na região (220v) para (115v), fazendo o motor girar mais devagar. Dependendo do motor utilizado o dimmer e o transformador podem ser desconsiderados. Foram utilizadas chapas de *Medium Density Fiberboard* (MDF) e PVC, mas podem ser substituídas por madeira, plástico ou material mais adequado.

13 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A produção desta monografia gerou conteúdos além das expectativas e mesmo escrevendo sobre um pouco de cada coisa, pode-se ter uma noção do quanto o conhecimento humano ainda é limitado. Quanto mais se pesquisava mais haviam coisas a serem ditas, explanadas. Cada capítulo gera possibilidade para escrever um livro a respeito, mostrando que a matemática é uma ciência consideravelmente ampla, sendo base para diversas outras áreas de conhecimento. Como disse D’ambert, “a álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu.”.

A esperança gerada ao fim deste trabalho é que ele possa contribuir para a fundamentação de professores, e até mesmo curiosos, como foi meu caso ao escrever sobre o tema. Instigar a pesquisa mais profunda acerca dessas curvas e superfícies tão curiosas, que se manifestam nas leis da natureza e também no produzir humano. Dar gosto nas ministrações de aulas a respeito, abrindo a mente e fazendo perceber que aquelas equações esquisitas estão conosco todos os dias, mas quase nunca percebemos sua manifestação.

A quem leu até aqui, deixo meus parabéns por se interessar por um saber tão belo, e também meu incentivo à diversificação no ensino-aprendizagem, com a possibilidade de um melhor aproveitamento e exploração nas abordagens deste tema, sendo o dispositivo didático apenas uma das opções, que ainda pode ser aperfeiçoada ao montá-lo com duas folhas.

O resultado de muita pesquisa revela que a relação existente entre teoria e prática no estudo das cônicas e quádras está em constante evolução, cheia de descobertas e inovações tecnológicas, como foi o exemplo do telescópio, que muito contribui para a exploração espacial.

Ainda há muito a ser explorado, exemplificando temos o retângulo fundamental e o formato das cônicas, as esferas de Dandelin e sua relação com os focos das cônicas, o cálculo da excentricidade a partir dos coeficientes da equação quadrática, cônicas determinadas por cinco pontos, rotação e translação de eixos, equações polares, geometria projetiva das cônicas, projeções cartográficas policônicas, etc.

“A matemática é a ciência mais barata. Não requer qualquer equipamento caro, ao contrário da física ou da química. Tudo o que precisamos para a matemática é de um lápis e papel.” (George Polya).

Para finalizar, deixo meu endereço de e-mail para sugestões, dúvidas e troca de saberes: leticiamrmarques@gmail.com.

REFERÊNCIAS

- 33, H. *Voo supersônico*. 2014. Disponível em: <<http://blog.hangar33.com.br/voo-supersonico-quebrando-a-barreira-do-som/>>. Acesso em: 16 nov. 2019.
- ART.COM. *Manhattan Bridge at sunrise*. 2019. Disponível em: <<https://www.art.com/products/p48691631815-sa-i10951802/manhattan-bridge-at-sunrise-new-york-city-new-york-state-usa>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- ASTRONOO. *A excentricidade da Terra*. 2013. Disponível em: <<http://www.astronoo.com/pt/artigos/excentricidade-terra.html>>. Acesso em: 20 nov. 2019.
- BARBOSA, V. H. Introdução ao estudo das seções cônicas em sua abordagem etimológica. *SINECT*, 2014. Disponível em: <<http://www.sinect.com.br/2014/down.php?id=2924&q=1>>. Acesso em: 05 nov. 2019.
- BRAGA, N. C. *O foco das antenas parabólicas*. 2019. Disponível em: <<http://www.newtonbraga.com.br/index.php/telecom-artigos/2132-tel021.html>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- BRITTON, J. Occurrence of the conics. *Camosun*, 1999. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/lenimar/ocorrenc.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- CAMPOLINO, M. L. *Translação e rotação de cônicas em R2*. 57 f. Monografia (Mestrado) — UNB, 2014. Disponível em: <<http://www.mat.unb.br/ruviaro/TCCMarcio%20Campolino.pdf>>. Acesso em: 05 dez. 2019.
- CERQUEIRA, A. A. *Parábola e Suas Aplicações*. 64 f. Monografia (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/22969>>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- CHUNG, K. *A Parábola, sua propriedade Refletora e aplicações*. 39 f. Monografia (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013. Disponível em: <http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc_kenji_chung_saldanha.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2019.
- CÔNICAS. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Refletor_parab%C3%B3lico>. Acesso em: 05 dez. 2019.
- CORREIA, M. C. L. F. *Diferentes Abordagens ao Estudo das Cônicas*. 130 f. Monografia (Mestrado) — Universidade do Porto, Porto, 2013. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/70291/2/24513.pdf>>. Acesso em: 22 ago. 2019.
- CYRULIES, E. Generación de cônicas con luz láser. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, Buenos Aires, v. 8, n. 2, 2011. Disponível em: <https://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/10853/5_Cyruilies_2011.pdf?sequence=6&isAllowed=y>. Acesso em: 9 nov. 2019.
- DALAZOANA, R. *Reference Systems*. 2016. Disponível em: <<http://www.cartografica.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2011/10/Capítulo-2-Reference-Systems.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- DALAZOANA, R. *Sistema Geodésico de Referência e sua Evolução no Brasil*. 2016. Disponível em: <http://www.cartografica.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2011/10/CAP2_DISSERT_REGIANE.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2019.
- DICIONARIOETIMOLOGICO. *Origem da palavra palavra*. 2019. Disponível em: <<https://www.dicionarioetimologico.com.br/palavra/>>. Acesso em: 04 nov. 2019.

- DOCPLAYER. *Superfícies Quádricas*. 2019. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/75050700-21-e-22-superfícies-quadricas-sumario.html>>. Acesso em: 04 dez. 2019.
- FELIPE. *Hipérbole como lugar geométrico*. 2019. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yebcdAC3>>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- FIGURASDELINGUAGEM. *Elipse*. 2019. Disponível em: <<https://www.figurasdelinguagem.com/elipse/>>. Acesso em: 04 nov. 2019.
- FREEPIK. *Antena parabólica*. 2019. Disponível em: <https://br.freepik.com/fotos-premium/antena-parabolica-com-ceu-azul_2882410.html>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- GASPAR, A. S. *As Cônicas, Quádricas e Suas Aplicações*. 76 f. Monografia (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/16921>>. Acesso em: 6 nov. 2019.
- GONÇALVES, L. *Propriedades Reflexivas das Cônicas*. 52 f. Monografia (Mestrado) — PUC-Rio, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=929>. Acesso em: 21 nov. 2019.
- HELFMANN. *Verdubbeling van de kubus*. 2009. Disponível em: <https://nl.wikipedia.org/wiki/Verdubbeling_van_de_kubus#/media/Bestand:W%C3%BCrfelvolumen.jpg>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- KAINAM. *led light bulb vs day maker lights*. 2013. Disponível em: <<https://www.harley-davidsonforums.com/threads/led-light-bulb-vs-day-maker-lights.358298/page-3>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- KALEFF, A. M. M. R.; VOTTO, B. G.; AZEVEDO, L. S. *Cônicas*. 2010. Disponível em: <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/conicas/professor01.html#sala>>. Acesso em: 05 dez. 2019.
- ÍKAROS. *Forno Solar*. 2012. Disponível em: <<https://grupoikaros.wordpress.com/forno-solar/>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- KIM, J. *Akashi Bridge*. 2005. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Akashi_Bridge.JPG>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- LELIVRESCOLAIRE. *La lunette astronomique de Galilée*. 2019. Disponível em: <<https://www.lolivrescolaire.fr/manuel/50/histoire-geographie-5e/chapitre/564/le-developpement-des-sciences-aux-xvie-et-xviii-siecles/page/693182/galilee-et-les-progres-de-l-astronomie/lecon/document/707029>>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- LENZ, M. *O estudo das cônicas a partir da definição geométrica*. 51 f. Monografia (Mestrado) — UNESP, 2014. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-mainara.pdf>>. Acesso em: 18 out. 2019.
- LINCOLINS. *Archimedes Death Ray*. 2019. Disponível em: <<https://worldofwarships.eu/en/news/general-news/quicker-than-a-ray-of-light/>>. Acesso em: 22 nov. 2019.
- LOPES, J. F. *Cônicas e aplicações*. 170 f. Monografia (Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91061/lopes_jf_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 29 ago. 2019.
- LUMENLEARNING. *The Ellipse*. 2014. Disponível em: <<https://courses.lumenlearning.com/precalctwo/chapter/the-ellipse/>>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- LUVICORPMEDICAL. *Litotriptor Extracorporeo Estacionario ESWL*. 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=BclC6YfESdg>>. Acesso em: 15 nov. 2019.

- MARTINS, N. M. E. *Estudo Dos Cabos e Pendurais de Uma Ponte Pedonal Suspensa Face Ao Seu Processo Construtivo*. 204 f. Monografia (Mestrado) — Universidade do Porto, 2009. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/59900/1/000136904.pdf>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- MATIKA. *Equação reduzida da elipse*. 2019. Disponível em: <<https://matika.com.br/conicas/equacao-reduzida-da-elipse>>. Acesso em: 13 nov. 2019.
- MATIKA. *Parábola*. 2019. Disponível em: <<https://matika.com.br/conicas/parabola>>. Acesso em: 07 nov. 2019.
- MOHNSAM, J. C. *As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas*. 87 f. Monografia (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, 2014. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/6688/TCC_%20Julio_Profmat_Furg.pdf?sequence=1>. Acesso em: 07 nov. 2019.
- NAVE, R. *Non-focusing Surfaces*. 2019. Disponível em: <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Acoustic/reflc.html>>. Acesso em: 19 nov. 2019.
- NUNES, M. R.; VOTTO, A. P. S. A etimologia como ferramenta para a aprendizagem significativa de biologia. *Revista Thema*, v. 15, n. 2, p. 592–602, 2018. Disponível em: <<http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/824/774>>. Acesso em: 04 nov. 2019.
- OLIVEIRA, E. de; PAULA, C. E. C. de. Aplicações das cônicas na demanda e oferta de produtos. *Ciências Exatas e da Terra, Ciências Agrárias e Engenharias*, São Carlos, v. 9, n. 3, 2009. Disponível em: <<http://publicatio.uepg.br/index.php/exatas/article/view/162/36>>. Acesso em: 3 nov. 2019.
- ORESTIS, A. *How Olympic Torches Work*. 2004. Disponível em: <<https://entertainment.howstuffworks.com/olympic-torch6.htm>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- PAIVA, G. *Parábolas e parabólicas*. 2009. Disponível em: <<http://www.bandaku.com.br/paraseparas.html>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- PALMER, G. *The National Statuary Hall in Washington*. 2014. Disponível em: <<https://courses.lumenlearning.com/precalctwo/chapter/the-ellipse/>>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- PARIGI, G. *Giulio Parigi*. 1594. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Giulio_Parigi>. Acesso em: 20 nov. 2019.
- PEREIRA, P. S. *A concepção de prática na visão de licenciandos de Matemática*. 202 f. Monografia (Doutorado) — UNESP, 2005. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102160/pereira_ps_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 23 nov. 2019.
- PETCIVIL. *Qual a diferença entre ponte Estaiada e ponte Pênsil?* 2019. Disponível em: <<https://petcivil.furg.br/na-engenharia/70-ponte-p%C3%AAsil-e-estaiada.html>>. Acesso em: 09 nov. 2019.
- PTAK, J. F. *Visual Chronology of Cosmologies*. 2010. Disponível em: <<https://westemby.tumblr.com/post/1177196958/visual-chronology-of-cosmologies-part-1>>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- RAMOS, D. *As paredes têm ouvidos na Grand Central Station*. 2013. Disponível em: <<https://blogs.oglobo.globo.com/nova-york/post/as-paredes-tem-ouvidos-na-grand-central-station-516551.html>>. Acesso em: 12 nov. 2019.

- REISI, A. Q.; NEHRING, C. M. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 19, n. 2, p. 339–364, 2017. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31841/pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2019.
- ROMANO, T. *Copinho de Gelatina Bicolor*. 2012. Disponível em: <<https://panelaterapia.com/author/tati>>. Acesso em: 15 nov. 2019.
- SÁNCHEZ, C.; RAMÓN, J. La segunda guerra púnica en la bética. *Habis*, Universidad de Sevilla, n. 6, p. 213–240, 1975. Disponível em: <https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/12347/file_1.pdf?sequence=1>. Acesso em: 07 nov. 2019.
- SANTOS, D.; RENATO, P. *História da Física - Os Espelhos de Arquimedes*. 2016. Disponível em: <<http://www.fisica-interessante.com/historia-da-fisica-espelhos-de-arquimedes.html>>. Acesso em: 07 nov. 2019.
- SHARMA, R. *Odeillo solar furnace*. 2018. Disponível em: <<https://alchetron.com/Odeillo-solar-furnace>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- SILVA, D. M. F. *A Hipérbole e suas Aplicações*. 81 f. Monografia (Mestrado) — UFG, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3442>>. Acesso em: 05 dez. 2019.
- SILVA, L. G. *Criando Elipse Com Dobraduras*. 2019. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/KkJ6R4VF>>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- SOFISICA. *Leis de Kepler*. 2019. Disponível em: <<https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/GravitacaoUniversal/lk.php>>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- SOPORTUGUES. *Elipse*. 2019. Disponível em: <<https://www.soportugues.com.br/secoes/estil/estil8.php>>. Acesso em: 05 nov. 2019.
- SOUSA, J. M. R. D. *Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: As Soluções na Antiga Grécia*. 114 f. Monografia (Mestrado) — Universidade do Porto, Porto, 2001. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/10216/10387>>. Acesso em: 5. nov. 2019.
- SOUZA, L. D. *Cônicas e suas propriedades notáveis*. 66 f. Monografia (Mestrado) — UFSC, Florianópolis, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/128599>>. Acesso em: 28 ago. 2019.
- TELESCOPIOSASTRONOMICOS. *Refletores*. 2018. Disponível em: <<https://www.telescopiosastronomicos.com.br/refletores.html>>. Acesso em: 15 nov. 2019.
- THEYMADETHAT. *Odeillo Solar Furnace*. 2019. Disponível em: <<https://theymadethat.com/things/s4l/odeillo-solar-furnace>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- VENTURI, J. J. *Cônicas e Quádricas*. 5. ed. Editora Unificado, 1949. ISBN 8585132485. Disponível em: <<http://197.249.65.74:8080/biblioteca/bitstream/123456789/1181/1/Conicas%20e%20Quadricas%20%28Livro%29.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2019.
- VOLCHAN, S. B. *Uma breve Introdução à Mecânica Celeste*. IMPA, 2007. ISBN 9788524402647. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/26CBM_15.pdf>. Acesso em: 18 out. 2019.
- WAVE, K. *A recent sunrise over the George Washington Bridge*. 2019. Disponível em: <<https://br.pinterest.com/pin/527695281324349740/>>. Acesso em: 08 nov. 2019.
- WIKIPEDIA. *Modelo atômico de Rutherford*. 2007. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_atômico>. Acesso em: 12 nov. 2019.

WIKIPEDIA. *Forno Solar*. 2011. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Forno_solar>. Acesso em: 08 nov. 2019.

WIKIPEDIA. *Antena parabólica*. 2019. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Satellite_dish#/media/File:Off-axis_parabolic_reflector.svg>. Acesso em: 08 nov. 2019.

WIKIPEDIA. *Hipérbole (Figura de Estilo)*. 2019. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Hip%C3%A9rbole_\(figura_de_estilo\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Hip%C3%A9rbole_(figura_de_estilo))>. Acesso em: 05 nov. 2019.

WIKIPEDIA. *Telescópio refletor*. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Telesc%C3%B3pio_refletor>. Acesso em: 22 nov. 2019.

WISDOM, N. *Reflective property of a parabola*. 2019. Disponível em: <<http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa08/Wisdom/EMAT6690/Parabolanjw/reflectiveproperty.htm>>. Acesso em: 19 nov. 2019.

YOLKOWSKI, J. *Conic Sections*. 2012. Disponível em: <<https://mathlair.allfunandgames.ca/conics.php>>. Acesso em: 12 nov. 2019.