



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS.**

**CAMPUS PALMAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ARTHUR BATISTA DE SOUZA

INTRODUÇÃO A DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

**Palmas - TO
2019**

ARTHUR BATISTA DE SOUZA

INTRODUÇÃO A DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Tocantins - Campus Palmas, como exigência à obtenção do grau de graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Edson Luiz Kraemer

**Palmas-TO
2019**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvida pelo Serviço Técnico da Biblioteca João Paulo II

Souza, Arthur Batista de

Introdução a decomposição em valores singulares / Arthur Batista de Souza. - Palmas, 2019
68 f.

Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação
Ciência e Tecnologia do Tocantins - Campus Palmas, 2019.

Orientador(a): Prof. Edson Luiz Kraemer

1. Valores Singulares. 2. Autovalores. 3. Fatorações de Matrizes. 4. Álgebra Linear. I. Título

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para que eu pudesse chegar até aqui. Em especial, agradeço a Deus, por ser a força motriz dessa longa caminhada em todos os momentos. E por permitir que tudo ocorresse conforme a sua vontade.

- A minha mãe por ser minha fonte de incentivo diário. Por me fornecer tudo aquilo que eu precisava: amor, carinho, paciência, inspiração. E por acreditar que é possível ser uma pessoa e um profissional brilhante.
- Ao meu irmão Alessandro Batista de Souza, por nossa parceria e cumplicidade.
- Às minhas tias Maria Aparecida, Luzanira, Júlia, Josefina, Vânia, Maria, Roberta, Socorro e aos meus tios Carlúcio, João, Luiz, Joaquim, Marcos por me atenderem em todos os momentos em que precisei e por serem ombro amigo.
- A minha prima Marisa Karem, que está nessa mesma jornada que eu, e me deu apoio e aconselhou durante todo o processo.
- Aos meus amigos Marco e Débora Dutra, companheiros durante a jornada do curso, dando suporte moral e fazendo companhia nos melhores momentos.
- Aos meus amigos Débora, Diva, Eric, Janaína, Josivan, Pablo e Rafael, companheiros do ensino médio e amigos para toda a vida.
- Aos meus colegas Dimas, Frank, Helom, José Carlos e Letícias Meneses, companheiros desde o começo do curso.
- Aos meus amigos Mirene, Azenati, Letícia Ferreira, Dyana, Lisandra, Thales e André, companheiros e parceiros do LABMAT-Laboratório de Matemática do IFTO.
- Ao meu orientador, Prof. Me Edson Luiz Kraemer, pela paciência, cuidado e atenção.
- Ao Prof. Drº Paulo Cléber Mendonça Teixeira e ao Prof. Drº Wallysonn Alves de Souza por aceitarem de forma solícita a constituírem minha banca.
- A todos os professores e colegas do Curso de Licenciatura em Matemática que me ensinaram o ofício de ser professor e de aprender a enfrentar os desafios cotidianos. Pelo exemplo de conhecimento, de profissionalismo, de amor e respeito.
- Aos professores de outros Cursos em que tive o imenso prazer de conhecê-los.
- A todos àqueles que de alguma forma acreditaram em mim e contribuíram.

*"Você precisa entender, a maioria destas
pessoas não está preparada para despertar. E
muitas delas estão tão inertes, tão
desesperadamente dependentes do sistema, que
irão lutar para protegê-lo".*
Morpheus - Matrix

RESUMO

Partindo da premissa de explorar aplicações da matemática estudada durante a graduação foi abordado nesse trabalho uma aplicação da álgebra linear. Para tanto, foi apresentado o conceito de Decomposição em Valores Singulares, uma das fatorações de matrizes mais importantes, de uma matriz qualquer. Esse conceito não fez parte do programa da disciplina de Álgebra Linear por se tratar de um tema não trivial da disciplina. Devido a esse fato, apresentamos os conceitos necessários, estes estudados na disciplina mencionada, para a definição da Decomposição em Valores Singulares e, em sequência, apresentamos a definição, bem como provamos a existência da decomposição em estudo para uma matriz real qualquer. Uma aplicação da Decomposição em Valores Singulares à Compressão Digital de Imagens é apresentada. Aplicamos o método à duas imagens, sendo uma em preto e branco e outra colorida. O processo no qual a recomposição da imagem decomposta é reconstruída é explicado para melhor elucidação e compreensão do poder e estabilidade desse método.

Palavras-chaves: Decomposição em Valores Singulares; Fatorações de Matrizes; Álgebra Linear e Aplicações.

ABSTRACT

Based on the premise of exploration of mathematics's applications studied during the graduation, it was approached on this work an application of linear algebra. For that, it was presented the concept of Singular Values Decomposition, one of the most important factorizations of matrices, of some matrix. This concept isn't from the program of the subject of Linear Algebra, because it treat about a non-trivial theme from the subject. Due to this fact, it was presented the necessary concepts, these ones studied on the subject mentioned, to define the Singular Values Decomposition and, after that, it was presented the definition, as well as it was proved the existence of the decomposition studied for some real matrix. An application of the Singular Values Decomposition to the Compressed Digital Images is presented. It was applied the method to two images, one of these on gray-scale and other colored. The process in which the recomposition of the decomposed image is reconstructed and explicated for the best explanation and comprehension of the power and stability of this method.

Key-words: Singular Values Decomposition; Factorization of Matrix; Linear Algebra and Applications.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Utilizando 1 valor singular	45
Figura 2 – Utilizando 2 valores singulares	45
Figura 3 – Utilizando 4 valores singulares	45
Figura 4 – Utilizando 6 valores singulares	45
Figura 5 – Utilizando 8 valores singulares	45
Figura 6 – Utilizando 10 valores singulares	45
Figura 7 – Utilizando 12 valores singulares	45
Figura 8 – Utilizando 14 valores singulares	45
Figura 9 – Utilizando 16 valores singulares	46
Figura 10 – Utilizando 18 valores singulares	46
Figura 11 – Utilizando 20 valores singulares	46
Figura 12 – Utilizando 25 valores singulares	46
Figura 13 – Utilizando 50 valores singulares	46
Figura 14 – Utilizando 75 valores singulares	46
Figura 15 – Utilizando 100 valores singulares	46
Figura 16 – Imagem Albert Einstein original	46
Figura 17 – Escala de erros na compressão da imagem em preto e branco	47
Figura 18 – Utilizando 1 valor singular	48
Figura 19 – Utilizando 2 valores singulares	48
Figura 20 – Utilizando 4 valores singulares	48
Figura 21 – Utilizando 6 valores singulares	48
Figura 22 – Utilizando 8 valores singulares	48
Figura 23 – Utilizando 10 valores singulares	48
Figura 24 – Utilizando 12 valores singulares	48
Figura 25 – Utilizando 14 valores singulares	48
Figura 26 – Utilizando 16 valores singulares	49
Figura 27 – Utilizando 18 valores singulares	49
Figura 28 – Utilizando 20 valores singulares	49
Figura 29 – Utilizando 25 valores singulares	49
Figura 30 – Utilizando 50 valores singulares	49
Figura 31 – Utilizando 75 valores singulares	49
Figura 32 – Utilizando 100 valores singulares	49
Figura 33 – Imagem hibisco azul	49
Figura 34 – Utilizando 1 valor singular	50
Figura 35 – Utilizando 2 valores singulares	50
Figura 36 – Utilizando 4 valores singulares	50

Figura 37 – Utilizando 6 valores singulares	50
Figura 38 – Utilizando 8 valores singulares	50
Figura 39 – Utilizando 10 valores singulares	50
Figura 40 – Utilizando 12 valores singulares	50
Figura 41 – Utilizando 14 valores singulares	50
Figura 42 – Utilizando 16 valores singulares	51
Figura 43 – Utilizando 18 valores singulares	51
Figura 44 – Utilizando 20 valores singulares	51
Figura 45 – Utilizando 25 valores singulares	51
Figura 46 – Utilizando 50 valores singulares	51
Figura 47 – Utilizando 75 valores singulares	51
Figura 48 – Utilizando 100 valores singulares	51
Figura 49 – Imagem hibisco verde	51
Figura 50 – Utilizando 1 valor singular	52
Figura 51 – Utilizando 2 valores singulares	52
Figura 52 – Utilizando 4 valores singulares	52
Figura 53 – Utilizando 6 valores singulares	52
Figura 54 – Utilizando 8 valores singulares	52
Figura 55 – Utilizando 10 valores singulares	52
Figura 56 – Utilizando 12 valores singulares	52
Figura 57 – Utilizando 14 valores singulares	52
Figura 58 – Utilizando 16 valores singulares	53
Figura 59 – Utilizando 18 valores singulares	53
Figura 60 – Utilizando 20 valores singulares	53
Figura 61 – Utilizando 25 valores singulares	53
Figura 62 – Utilizando 50 valores singulares	53
Figura 63 – Utilizando 75 valores singulares	53
Figura 64 – Utilizando 100 valores singulares	53
Figura 65 – Imagem hibisco vermelho	53
Figura 66 – Utilizando 1 valor singular	54
Figura 67 – Utilizando 2 valores singulares	54
Figura 68 – Utilizando 4 valores singulares	54
Figura 69 – Utilizando 6 valores singulares	54
Figura 70 – Utilizando 8 valores singulares	54
Figura 71 – Utilizando 10 valores singulares	54
Figura 72 – Utilizando 12 valores singulares	54
Figura 73 – Utilizando 14 valores singulares	54
Figura 74 – Utilizando 16 valores singulares	55
Figura 75 – Utilizando 18 valores singulares	55

Figura 76 – Utilizando 20 valores singulares	55
Figura 77 – Utilizando 25 valores singulares	55
Figura 78 – Utilizando 50 valores singulares	55
Figura 79 – Utilizando 75 valores singulares	55
Figura 80 – Utilizando 100 valores singulares	55
Figura 81 – Imagem hibisco colorido	55

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	PROCEDIMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS	16
3	PRÉ-REQUISITOS DE ÁLGEBRA LINEAR	18
3.1	Matrizes	18
3.1.1	Matriz nula	19
3.1.2	Matriz identidade	19
3.1.3	Matriz triangular	19
3.1.4	Matriz diagonal	20
3.1.5	Matriz transposta	20
3.1.6	Matriz simétrica	21
3.1.7	Matriz Inversa	21
3.1.8	Matrizes Particionadas em Blocos	21
3.2	Espaços Vetoriais	22
3.3	Bases	23
3.4	Transformações Lineares	23
3.5	Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear	24
3.6	Autovalores e autovetores	24
3.6.1	Determinação dos autovetores e autovalores	25
3.7	Espaço-Linha, Espaço-Coluna e Espaço-Nulo	28
3.8	Posto de uma Matriz	28
3.9	Matrizes Semelhantes	29
3.10	A matriz de Gram	30
4	DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES	32
4.1	A Decomposição de Schur	33
4.2	A Forma de Jordan	35
4.3	Decomposição em valores singulares	36
5	APLICAÇÃO	42
5.1	Octave	42
5.2	Comprimindo uma imagem	43
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	59

A	APÊNDICE A		61
A.1	Algoritmo para decomposição de uma imagem em preto e branco		61
B	APÊNDICE B		64
B.1	Algoritmo para decomposição de uma imagem colorida		64

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por finalidade ampliar os estudos de álgebra linear, bem como aplicações desses conteúdos nas mais diversas áreas do conhecimento. O corpus constituído por diversos conteúdos foi resultado dos estudos da disciplina de álgebra linear no 5º período do curso de Licenciatura em Matemática orientada pelo professor Me Magno Márcio de Azevedo, bem como os estudos realizados no PICME-Programa de Iniciação Científica e Mestrado, orientado pelo professor Dr. Paulo Cléber Mendonça Teixeira. Nessa perspectiva, entende-se que este estudo trata da fundamentação matemática da decomposição em valores singulares, que trata-se de encontrar uma fatoração de uma matriz em três fatores, uma extensão das fatorações utilizadas com mais frequência em cálculos numéricos.

A técnica de decomposição de valores singulares, ou abreviadamente DVS, tem uma longa e surpreendente história. Começou nas ciências sociais com testes de inteligência. Os primeiros pesquisadores de inteligência notaram que os testes dados para medir diferentes aspectos da inteligência, como verbal e espacial, eram frequentemente correlacionados. Por causa disso, levantaram a hipótese de que havia uma medida geral de inteligência em comum, que eles chamavam de “g”, para “inteligência geral”, agora mais comumente conhecida como quantidade de inteligência “QI”. Então começaram a provocar os diferentes fatores que compunham inteligência, de modo a retirar o mais importante.

Conhecida sob muitos nomes diferentes, a decomposição em valores singulares, nos primeiros dias, como a passagem acima sugere, foi chamada de “análise fatorial”. Outros termos incluem decomposição de componente principal (PC) e análise de função ortogonal empírica (EOF). Todos estes são matematicamente equivalentes, embora a forma como são tratados na literatura seja frequentemente bem diferente.

Hoje, a decomposição em valores singulares espalhou-se por muitos ramos da ciência, em particular tem-se aplicada a psicologia, sociologia, meteorologia e astronomia. Também é extremamente útil no aprendizado de máquinas e em estatísticas descritivas e preditivas.

Este trabalho foi proposto à medida que se observa a dificuldade de compreensão de conceitos concernentes à álgebra linear por parte dos estudantes. Por muitas das vezes o que se estuda em álgebra linear tende a fugir da realidade dos estudantes, impossibilitando assim a compreensão dos conceitos, em vista até do fato da álgebra linear ser estudada também como uma operação sem aplicação prévia. Justifica-se no propósito de ampliar os estudos voltados para a álgebra linear incentivando aprofundamentos no que diz respeito à aplicação da matemática em outras áreas. Desse modo, almeja que estudo e significado

andem juntos para compreensão e inovação.

Faz-se necessário explicitar que, ao decorrer do tempo, a matemática vem sendo aplicada nas mais diversas áreas do conhecimento, sendo assim, cada ferramenta descoberta, torna-se usual e muitas das vezes se atribui significado diferente a ferramentas que antes havia somente uma visão de aplicação de compreensão.

Esta pesquisa torna-se importante porque promove estudos referentes à álgebra, e esta envolve o ser humano bem como sua história. Para tanto, estudos referentes ao homem e a álgebra contribuem para melhorias comunicativas e interpretativas, proporcionando resultados relevantes para que sejam revistas ou melhor compreendidas as formas pelas quais atribuímos sentidos às coisas que nos rodeiam.

Este trabalho foi dividido em seis capítulos e um apêndice. Um capítulo introdutório, seguido do capítulo dois, no qual se dá início a investigação, apresentamos procedimentos teórico-metodológicos. No terceiro capítulo, são apresentados os conceitos necessários para a construção da decomposição em valores singulares, objeto principal do estudo. O quarto capítulo, intitulado “Decomposição de Matrizes”, apresenta as seguintes seções: A Decomposição de Schur, A Forma de Jordan e a Decomposição em Valores Singulares, as duas primeiras sendo necessárias para a construção da última. O quinto faz a descrição e análise dos procedimentos da aplicação da decomposição em valores singulares, dados que foram divididos em aplicações diversas e compressão de imagem digital. Além dos cinco capítulos, o trabalho contém ainda as considerações finais, as referências e um apêndice com os algoritmos utilizados.

2 PROCEDIMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Este capítulo contém os procedimentos metodológicos que dão suporte a este estudo. O propósito desta pesquisa é exploratório e explicativo. Conforme Gil (2007), a pesquisa exploratória visa proporcionar maior proximidade acerca da questão apresentada, na tentativa de torná-la mais precisa.

Já a pesquisa explicativa, propõe-se a localizar os fenômenos que levam a ocorrência dos fatos. A abordagem utilizada comporta o caráter qualitativo. Para Goldenberg (1997), a pesquisa qualitativa se interessa na especulação, buscando compreender determinado grupo, uma vez que os dados coletados são analisados com base na interpretação sem mensuração dos resultados.

Assim sendo, a natureza desta pesquisa é classificada como básica, tendo em vista a geração de novos conhecimentos sem a finalidade de aplicação, com base em verdades universais. Para isso, utiliza-se de diversas técnicas, e uma delas é a revisão bibliográfica, visto que, segundo Fonseca (2002), se desenvolve a partir de estudos já realizados.

Para tanto, foi realizado um estudo teórico sobre a origem e conceitos de álgebra linear e as decomposições de matrizes. As obras consultadas abrangem autores da Álgebra Linear, tais como Poole e Anton, perpassando por escritores de artigos, trabalhos de conclusão de curso, teses e monografias acadêmicas da área de Matemática.

O corpus desta pesquisa é constituído por oitenta imagens relativas a decomposição em valores singulares. As fontes foram escolhidas aleatoriamente em sites da internet. O propósito de se investigar a decomposição em valores singulares ocorreu devido à sua abrangente possibilidade de aplicações e a sua construção estar tão entrelaçada a conceitos estudados em álgebra linear.

A fundamentação teórica deste trabalho é composta por estudos de álgebra linear conforme Lima (2018), Lima (2011) e Steinbruch (1987), teorias sobre as decomposições de matrizes consoante Poole (2004) e Anton (2000). Além de estudos significativos sobre matrizes de um ponto de vista computacional segundo Golub (1989). Também utilizou-se Oxford (1990) e Houaiss (2010) para consultar conceitos de palavras retiradas de artigos e textos em inglês, a fim de abranger a fonte teórica do trabalho. Além disso, explorou-se a utilização da álgebra computacional, embasando-se em Mathews (2014), Cline; Dhillon (2006) com a intenção de se fazer entender como a decomposição em valores singulares é compreendida quando se considera o contexto computacional. Ademais, visa-se observar a eficiência da técnica de compressão de imagem digital e também do seu significado. No próximo capítulo será feita a análise, discussão e exploração dos dados.

O software utilizado nas aplicações para a compressão de imagens foi o GNU Octave

5.1.

3 PRÉ-REQUISITOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos e resultados de álgebra linear, importantes para a fundamentação do texto.

3.1 Matrizes

Definição 3.1.1. *Uma **matriz** é um agrupamento retangular de números. Os números neste agrupamento são chamados **entradas** da matriz.*

De forma abreviada escrevemos $A = A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$, para representar uma matriz m por n . Assim, para representar o elemento de uma matriz, utilizamos uma letra com dois índices, o primeiro indica a linha i na qual o elemento se encontra, e o segundo indica a coluna j na qual o elemento se encontra. De maneira genérica um elemento ij —ésimo de uma matriz A será indicado por a_{ij} , para todos os inteiros i e j , tais que, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, isto é,

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ com } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ e } i, j \in \mathbb{N}.$$

Os números m e n representam a dimensão da matriz.

Uma matriz que possui uma única linha é chamada de matriz linha e, da mesma forma, uma matriz que possui apenas uma coluna é chamada de matriz coluna.

Uma matriz $A_{m \times n}$ é dita retangular, se e somente se, $m \neq n$.

Uma matriz $m \times n$, quando $m = n$ (o número de linhas e colunas é igual), diz-se que a matriz é quadrada do tipo $n \times n$ ou simplesmente de ordem n .

Exemplo 3.1.1. *Considerando a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Note que em A a quantidade de linhas e de colunas é exatamente a mesma, portanto é uma matriz quadrada.

Da matriz quadrada do exemplo (3.1.1) tem-se::

1. Se $i = j$, então a_{ij} pertence as diagonal principal.
2. Se $i > j$, então a_{ij} está abaixo da diagonal principal.
3. Se $i < j$, então a_{ij} está acima da diagonal principal.

3.1.1 Matriz nula

No conjunto das matrizes, a matriz que tem todos os elementos iguais a zero demonina-se nula. Vamos simbolizar a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m \times n}$, e a matriz de ordem n por 0_n .

Exemplo 3.1.2. *Seja a matriz $0_{2 \times 3}$, tal qual*

$$0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na matriz nula do tipo $m \times n$ temos $a_{ij} = 0$, quaisquer que sejam i e j , com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

3.1.2 Matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero é chamada de matriz identidade e seu símbolo é I_n .

Propriedade 3.1.1. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n , então $A \cdot I_n = A$.*

3.1.3 Matriz triangular

Vamos considerar uma matriz quadrada de ordem n . Quando os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, então essa matriz é dita matriz triangular superior.

Exemplo 3.1.3. *Seja a matriz M , tal qual*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -4 & \sqrt{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De forma análoga definimos matriz triangular inferior, basta tomar uma matriz N , tal que seus elementos acima da diagonal principal sejam todos nulos.

Exemplo 3.1.4. *Seja a matriz N , tal qual*

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -5 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 3.1.1. *Toda matriz triangular é quadrada, entretanto a recíproca dessa afirmação não é válida.*

3.1.4 Matriz diagonal

A matriz quadrada A de ordem n é dita diagonal, se todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal forem nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo 3.1.5. *Seja a matriz diagonal A , tal que*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observação 3.1.2. *Uma matriz identidade é matriz quadrada, matriz triangular e matriz diagonal.*

3.1.5 Matriz transposta

Definição 3.1.2. *Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a matriz transposta de A é a matriz, denotada por A^T , de ordem $n \times m$ que se obtém da matriz A permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice.*

Exemplo 3.1.6. *Seja a matriz $A_{2 \times 3}$, tal que:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

então,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Propriedade 3.1.2. *Propriedades da Matriz Transposta:*

$$i) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$ii) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$iii) (A^T)^T = A$$

$$iv) (AB)^T = B^T A^T$$

3.1.6 Matriz simétrica

Definição 3.1.3. *Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada. Dizemos que A é simétrica se $A = A^T$*

Outra forma de enunciarmos a definição [3.1.3](#) é fazendo igualdades de elementos de matrizes. Dizemos que uma matriz é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$, com $1 \leq i, j \leq n$.

Exemplo 3.1.7. *Seja a matriz $A_{2 \times 2}$*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \text{ note que } A^T = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \text{ logo, a matriz é simétrica, pois } A = A^T.$$

Propriedade 3.1.3. *Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica.*

Demonstração 1 (ANTON, 2000. PG. 68).

3.1.7 Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada A , de ordem n , se X é uma matriz tal que $AX = I_n$, então X é denominada matriz inversa de A e é indicada por A^{-1} . Quando existe matriz inversa de A , dizemos que A é uma matriz invertível ou não singular.

Exemplo 3.1.8. *A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ tem como inversa a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$*

3.1.8 Matrizes Particionadas em Blocos

Definição 3.1.4. *Uma matriz pode ser subdividida em blocos ou particionada em matrizes menores inserindo riscos horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas.*

Exemplo 3.1.9. *A seguir exibiremos três partições possíveis de uma matriz 3×4 arbitrária A . A primeira é uma partição de A em quatro **submatrizes** A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22}*

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

$$\text{Tal que } A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}$$

A segunda é uma partição de A em suas matrizes-linha r_1, r_2 e r_3

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \right]$$

A terceira é uma partição de A em suas matrizes-coluna c_1, c_2, c_3 e c_4 ;

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \right]$$

3.2 Espaços Vetoriais

Seja um conjunto V não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$$Vu, v \in V, u + v \in V$$

$$V\alpha \in \mathbb{R}, Vu \in V, \alpha u \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

Em relação à adição:

1. $(u + v) + w = u + (v + w), Vu, v, w \in V$
2. $u + v = v + u, Vu, v \in V$
3. $\exists 0 \in V, \forall u \in V, u + 0 = u$
4. $\forall u \in V, \exists (-u) \in V, u + (-u) = 0$

Em relação à multiplicação por escalar:

1. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
2. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
3. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
4. $1u = u$

para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Observação 3.2.1. Os elementos do espaço vetorial V são chamados vetores, apesar de sua natureza poder ser de um polinômio, de uma matriz ou até mesmo de números de um conjunto numérico.

3.3 Bases

Segundo Lima (2018) bases são

Os espaços vetoriais de dimensão finita, possuem estrutura algébrica extremamente simples, evidenciada pelas ideias de base e dimensão. Uma vez fixada uma base num espaço vetorial de dimensão n , seus elementos são meramente combinações lineares dos n vetores básicos, com coeficientes univocamente determinados.

Seja V um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $X \subset V$ é linearmente independente (abreviadamente, L.I.) quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X . Para evitar ambiguidade, no caso em que $X = v$ consta de um único elemento v , diz-se que X é L.I., por definição, quando $v \neq 0$. Quando X é L.I., diz-se também que os elementos de X são vetores lineamente independentes.

Quando o conjunto X é L.I. seus elementos são todos diferente 0, pois o vetor nulo é combinação linear de quaisquer outros: $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m$.

De modo geral definimos que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são ditos linearmente independentes (L.I.) quando $\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Em outras palavras, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros. Já os ditos linearmente dependentes (L.D.) ocorrem quando houver uma combinação linear $\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0$ onde nem todos os coeficientes c_i são nulos; em outras palavras, um deles é combinação linear dos outros.

3.4 Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma aplicação, ou seja, uma ideia de função da forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ [tal como $f(x) = x^2$], que transformam números reais em números reais.

Definição 3.4.1. *Uma transformação linear de um espaço vetorial V para um espaço vetorial W é uma aplicação $T: V \rightarrow W$ tal que, para todo u e v em V e para todos os escalares c ,*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(cv) = cT(v)$

Para provar essa definição basta exigir que T preserve todas as combinações lineares, isto é,

$T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear se, e somente se,

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_k T(v_k)$$

para todo $v_1, \dots, v_k$ em V e escalares $c_1, \dots, c_k$.

Definição 3.4.2. *As transformações lineares T de um espaço vetorial V em si mesmo, isto é, $T: V \rightarrow V$, são chamadas operadores lineares sobre V .*

3.5 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Definição 3.5.1. *Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. O núcleo de T , denotado por $\ker(T)$, é o conjunto de todos os vetores de V que são levados por T em 0 de W ; isto é,*

$$\ker(T) = \{v \text{ em } V : T(v) = 0\}.$$

Poole (2004) aborda acerca da nomenclatura $\ker(T)$ para denotar ao núcleo de T , ela é utilizada por causa da palavra *kernel*, que é derivada do termo *cyrnel*, do inglês antigo, uma forma da palavra *corn*, significando semente (*seed*) ou grão (*grain*). Tal como um grão de milho, o kernel de uma transformação linear é o seu "núcleo" ou "semente", no sentido de que é ele que carrega informações sobre muitas propriedades importantes da transformação.

A imagem de T denotada por $\text{im}(T)$, é o conjunto de todos os vetores de W que são imagens de vetores de V através de T , isto é,

$$\begin{aligned} \text{im}(T) &= \{T(v) : v \text{ em } V\} \\ &= \{w \text{ em } W : w = T(v) \text{ para algum } v \text{ em } V\} \end{aligned}$$

Teorema 3.5.1. *Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:*

1. *O núcleo de T é um subespaço de V .*
2. *A imagem de T é um subespaço de W .*

3.6 Autovalores e autovetores

Segundo Leon (2011, p.263), autovalores são

Uma parte comum em nossa vida quer notemos isso ou não. Onde houver vibrações haverá autovalores, as frequências naturais das vibrações. Se você já afinou um violão, você resolveu um problema de autovalores. Quando engenheiros projetam estruturas, eles se preocupam com frequências de vibração de estruturas. Esta preocupação é particularmente importante em regiões sujeitas a terremoto como a Califórnia. Os autovalores de um problema com condições de fronteira podem ser usados para determinar os estados energéticos de um átomo ou cargas críticas que causam flexão em uma viga (LEON, 2011. p. 263).

Como pode ser visto na obra de Leon (2011) os autovalores desenvolvem um papel fundamental nas aplicações da Matemática e, como veremos a seguir, é muito importante para a decomposição por valores singulares, que segundo Poole (2004) é uma das mais importantes dentre todas as fatorações de matrizes.

Nesta seção, vamos definir autovalores e autovetores e destacar suas principais propriedades.

Definição 3.6.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é um autovetor do operador T se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$T(v) = \lambda v.$$

O número real λ , tal que $T(v) = \lambda v$ é autovalor de T associado ao autovetor v .

Admitindo que A seja a matriz do operador T , da definição (3.6.1), e que a dimensão de V é n , pode-se reescrever a definição (3.6.1) da seguinte forma:

Definição 3.6.2. *Seja A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é dito autovalor de A se existir um vetor não nulo v tal que $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de autovetor associado ao autovalor λ .*

“Um vetor $v \neq 0$, é vetor próprio se a imagem $T(v)$ for um múltiplo escalar de v . No $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ diríamos v e $T(v)$ têm a mesma direção. Assim, dependendo do valor de λ o operador T dilata v , contrai v , inverte o sentido de v ou o anula no caso de $\lambda = 0$.”(STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.276)

3.6.1 Determinação dos autovetores e autovalores

Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuja matriz na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

sendo v autovetor, e λ autovalor do operador T , tem-se que:

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \quad (3.1)$$

sabendo que $v = Iv$, com I sendo a matriz identidade de ordem n , então a equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v = 0 \quad (3.2)$$

note que essa equação resulta em um sistema homogêneo de ordem n , onde o termo independente de todas as equações são iguais a zero, portanto, ele admite uma solução onde todas as variáveis são nulas (solução trivial). Para que o sistema (3.2) admita soluções não nulas, ou seja, $v \neq 0$, devemos impor que $\det(A - \lambda I) = 0$, portanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

a equação (3.3), isto é $\det(A - \lambda I) = 0$, é chamada de equação característica do operador T , ou da matriz A , e suas raízes são os autovalores do operador. De posse dos autovalores substituímos eles na equação (3.2) e obtemos os autovetores associados a cada autovalor.

Exemplo 3.6.1. *Vamos determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T(v) = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$*

A matriz T , na base canônica, é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

seja λ o autovalor de A e v o vetor associado ao λ . Assim,

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \quad (3.4)$$

como $v \neq 0$, para que o sistema (3.4) admita solução diferente da solução trivial, devemos ter:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 - \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

de (2.4), temos a equação característica $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$ cujas raízes são os autovalores: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$. Para determinar os autovetores associados devemos considerar o sistema linear homogêneo (3.4).

Considerando $v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, o sistema (3.4) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)x - y + z = 0 \\ -x + (5 - \lambda)y - z = 0 \\ x - y + (3 - \lambda)z = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

I) Encontrando o autovetor associado ao autovalor 2.

Substituindo λ por 2 no sistema (3.5), obtém-se os vetores próprios associado a $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

o sistema (3.6) admite uma infinidade de soluções, a saber,

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

assim, os vetores do tipo $v_1 = \begin{bmatrix} x & 0 & -x \end{bmatrix}^T$, ou $v_1 = x \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_1 = 2$.

II) Encontrando o autovetor associado ao autovalor 3.

Substituindo λ por 3 no sistema (3.5), obtém-se os vetores próprios associado a $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

o sistema (3.7) admite uma infinidade de soluções, da forma,

$$\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

assim, os vetores do tipo $v_2 = \begin{bmatrix} x & x & x \end{bmatrix}^T$, ou $v_2 = x \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_2 = 3$.

III) Encontrando o autovetor associado ao autovalor 6.

Substituindo λ por 6 no sistema (3.5), obtém-se os vetores próprios associado a $\lambda_3 = 6$.

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

o sistema (3.8) admite uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

assim, os vetores do tipo $v_3 = \begin{bmatrix} x & -2x & x \end{bmatrix}^T$, ou $v_3 = x \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_3 = 6$.

3.7 Espaço-Linha, Espaço-Coluna e Espaço-Nulo

Nesta seção estudaremos três espaços vetoriais importantes associados com matrizes.

Definição 3.7.1. Para uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

os vetores

$$r_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$r_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{R}^n$ formados pelas linhas de A são chamados os vetores-linha de A e os vetores

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{R}^m$ formados pelas colunas de A são chamados os vetores-coluna de A .

A seguinte definição define três espaços vetoriais importantes associados com uma matriz.

Definição 3.7.2. Se A é uma matriz $m \times n$, então o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores-linha de A é chamado espaço-linha de A e o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelos vetores-coluna de A é chamado do espaço-coluna de A . O espaço-solução do sistema homogêneo de equações $Ax = 0$, que é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, é chamado de espaço-nulo de A .

3.8 Posto de uma Matriz

Nesta seção nos ocuparemos com as relações entre as dimensões do espaço-linha, do espaço-coluna e do espaço-nulo, estudados na seção anterior, e fundamentais para a aplicação de decomposição em valores singulares na compressão de imagem digital.

O posto de uma matriz foi definido pela primeira vez por Georg Frobenius (1849-1917), embora ele o tenha definido utilizando determinantes, e não como vamos definir aqui. Frobenius foi um matemático alemão que obteve seu doutorado e ensinou na Universidade de Berlim. Mais conhecido por suas contribuições à teoria de grupos, utilizava matrizes em seu trabalho em representação de grupos.

Teorema 3.8.1. *Os espaços linha e coluna de uma matriz A têm a mesma dimensão.*

Demonstração 2 (ANTON,2000. pg. 192).

Definição 3.8.1. *O posto de uma matriz A , denotado por $\text{posto}(A)$, é a dimensão de seus espaços linha e coluna.*

Teorema 3.8.2. *Para qualquer matriz A ,*

$$\text{posto}(A^T) = \text{posto}(A)$$

Demonstração 3. *Sabe-se*

$$\begin{aligned} \text{posto}(A^T) &= \dim(\text{col}(A^T)) \\ &= \dim(\text{lin}(A)) \\ &= \text{posto}(A) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.8.3. *Seja A uma matriz $m \times n$. Então:*

1. $\text{posto}(A^T A) = \text{posto}(A)$
2. *A matriz $n \times n$ $A^T A$ será invertível se, e somente se, $\text{posto}(A) = n$.*

Demonstração 4 (Poole,2004. pg. 183).

3.9 Matrizes Semelhantes

Definição 3.9.1. *Sejam A e B matrizes de ordem n . Dizemos que A é semelhante a B se existir uma matriz de ordem n invertível P tal que $P^{-1}AP = B$. Se A é semelhante a B , escrevemos $A \sim B$.*

Observação 3.9.1. *É interessante observarmos que:*

- Se $A \sim B$, podemos escrever também $A = PBP^{-1}$ ou $AP = PB$, condições equivalentes à da definição

- A matriz P depende de A e B . Ela não é única para um dado par de matrizes semelhantes A e B . Para comprovarmos, basta tomar $A = B = I$, caso em que $I \sim I$, já que $P^{-1}IP = I$ para qualquer matriz invertível P .

Teorema 3.9.1. *Sejam A , B e C matrizes de ordem n .*

1. $A \sim A$
2. Se $A \sim B$, então $B \sim A$
3. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$

Demonstração 5 (POOLE,2004. pg. 273).

Teorema 3.9.2. *Sejam A e B matrizes de ordem n com $A \sim B$. Então:*

1. $\det A = \det B$
2. A é invertível se, e somente se, B for invertível.
3. A e B têm o mesmo posto.
4. A e B têm o mesmo polinômio característico.
5. A e B têm os mesmos autovalores.

Demonstração 6 (POOLE,2004. pg. 274).

3.10 A matriz de Gram

A matriz de Gram é um método utilizado para construir uma base ortogonal (ou ortonormal) para qualquer subspaço de $\mathbb{R}^n$. Este método torna-se necessário para as mais úteis fatorações de matrizes.

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. A *matriz de Gram* dos vetores $v_1, \dots, v_k \in E$ é a matriz $\mathbf{g} = [g_{ij}] \in M(k \times k)$, onde $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Quando precisamos ser mais explícitos, escrevemos $\mathbf{g} = \mathbf{g}(v_1, \dots, v_k)$.

Dada uma base $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$, seja $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M(n \times k)$ a matriz das coordenadas dos vetores v_j em relação à base U , isto é:

$$v_j = a_{1j}u_1 + \dots + a_{nj}u_n \quad \text{para } j = 1, \dots, k$$

Seja ainda $\mathbf{h} = [h_{ij}] \in M(n \times n)$ a matriz de Gram da base U , isto é, $h_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$. Então, para $i, j = 1, \dots, k$, temos :

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{r=1}^n a_{ri}u_r, \sum_{s=1}^n a_{sj}u_s \right\rangle = \sum_{r,s=1}^n a_{ri}a_{sj}h_{rs}$$

$$= \sum_{r=1}^n a_{ri} \left(\sum_{s=1}^n h_{rs} a_{sj} \right) = \sum_{r=1}^n (\mathbf{a}^T)_{ir} (\mathbf{h}\mathbf{a})_{rj} = (\mathbf{a}^T \mathbf{h}\mathbf{a})_{ij}$$

portanto $\mathbf{g} = \mathbf{a}^T \mathbf{h}\mathbf{a}$.

Em particular, se tomarmos uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$, teremos $\mathbf{h} = \mathbf{I}_n$, portanto a matriz de Gram $\mathbf{g}$ se escreve como

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(v_1, \dots, v_k) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a},$$

onde $\mathbf{a}$ é a matriz das coordenadas dos vetores v_j em relação a uma base ortonormal de E . Daí resultam:

1. Toda matriz de Gram é não-negativa;
2. A matriz de Gram $\mathbf{g} = \mathbf{g}(v_1, \dots, v_k)$ é positiva (isto é, não invertível) se, e somente se, os vetores $v_1, \dots, v_k$ são **L.I.**.

Reciprocamente, se uma matriz $\mathbf{g} = [g_{ij}] \in M(k \times k)$ admite uma decomposição do tipo $\mathbf{g} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}$, onde $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M(n \times k)$ então, tomando uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ e escrevendo

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \quad (j = 1, \dots, k),$$

obtemos vetores $v_1, \dots, v_k \in E$ tais que

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a})_{ij} = g_{ij},$$

logo $\mathbf{g} = \mathbf{g}(v_1, \dots, v_k)$. Isto leva a mais uma propriedade das matrizes de Gram:

3. Toda matriz não-negativa $\mathbf{g} = [g_{ij}] \in M(k \times k)$ é a matriz de Gram de uma lista de vetores $v_1, \dots, v_k \in E$. Com efeito, existe $\mathbf{a} \in M(k \times k)$ simétrica (e não negativa) tal que $\mathbf{g} = \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$.

Demonstração 7 (LIMA, 2018. pg. 163).

4 Decomposição de Matrizes

A decomposição de matrizes é utilizada como objeto de estudo deste trabalho. Para Poole (2004) "a decomposição de matrizes é uma ferramenta extremamente importante, tanto prática quanto teoricamente".

Segundo Lima (2018), Poole (2004), Anton (2000) e Golub (1989) existem diversas formas de decompor matrizes, com aplicações práticas ou não. Divididas nas seguintes categorias:

1. Decomposição relacionada a solução de sistemas de equações lineares

Decomposição LU

Decomposição em Blocos LU

Fatoração de Rank

Decomposição de Cholesky

Decomposição QR

Fatoração RRQR

2. Decomposições baseadas autovalores

Decomposição em Autovalores

Decomposição de Jordan

Decomposição de Schur

Decomposição QZ

Fatoração de Takagi

Decomposição em Valores Singulares

3. Outras Decomposições

Decomposição Polar

Decomposição de Mostow

Forma normal de Sinkhorn

Forma normal de Williamson

Que distinguem-se basicamente por sua interpretação, áreas onde são aplicadas e fundamentação teórica. Para nosso propósito, vamos nos concentrar em três decomposições baseadas em autovalores a saber, a decomposição de Schur, a forma de Jordan e a decomposição em valores singulares.

4.1 A Decomposição de Schur

A decomposição de Schur é uma clássica e importante propriedade de uma matriz $n \times n$, e é descrita pelo seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. *Dada $A \in \mathbb{R}$ de ordem n , existe uma matriz unitária $U \in \mathbb{R}$, tal que, $A = U^T T U$, com T triangular superior cujas entradas da diagonal principal são os autovalores de A .*

Demonstração 8. *Para demonstrar utilizaremos indução sobre n . Se $n = 1$, A é triangular superior e não resta o que se demonstrar. Se $n > 1$, temos, por hipótese de indução que o teorema é verdadeiro para toda matriz de ordem $n - 1$. Seja v_1 um autovetor unitário correspondente a um autovalor λ_1 de A . Construindo uma base ortonormal com esses autovetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}$. A matriz $U_1 = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}$ é unitária e*

$$U_1^T A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

onde A_1 é uma matriz quadrada de ordem $n - 1$. De acordo com a hipótese de indução, existe uma matriz unitária V_1 de ordem $n - 1$ tal que $T_1 = V_1^T A_1 V_1$ é triangular superior. A matriz

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}$$

é unitária, sendo $U = U_1 U_2$, segue

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} U^T A U &= U_2^T (U_1^T A U_1) U_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ 0 & V_1^T A_1 V_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 V_1 \\ 0 & V_1^T A_1 V_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 V_1 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix} \\ &= T \end{aligned}$$

que é triangular superior.

□

Como A e T são triangulares de mesma ordem, temos que seus determinantes serão iguais (o produto dos elementos da diagonal principal), sendo assim possuem os mesmos autovalores e de mesma multiplicidade, então, dada T , temos que os elementos da diagonal principal são seus autovalores e, consequentemente, autovalores de A .

Exemplo 4.1.1. *Encontrar uma decomposição de Schur para a seguinte matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos primeiro T , que é uma matriz triangular superior cujos elementos da diagonal principal são os autovalores da matriz A . Como os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, temos que a matriz T será:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

onde $x \in \mathbb{R}$. Precisamos agora encontrar a matriz U que será composta por uma base ortonormal dos autovetores relacionados a matriz A , sendo assim, os correspondentes autovetores são:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normalizamos eles e obtemos

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, U será da forma:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $A = U^T T U$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x+2 & -x+4 \\ x+4 & -x+2 \end{bmatrix}$$

Para que a igualdade seja verdadeira basta que $x = 0$, sendo assim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 A Forma de Jordan

Uma alternativa à decomposição de Schur, com aplicações especialmente do ponto de vista teórico é conhecida como *Forma Canônica de Jordan*.

Para Lima (2018) a forma canônica de Jordan se mostra útil por exemplo no estudo de questões que envolvem potências sucessivas do operador A , como as equações lineares e as equações finitas lineares.

Definição 4.2.1. *Uma matriz quadrada de ordem n da forma*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

é denominada um bloco de Jordan de ordem n associado a λ . Uma matriz A é dita estar na forma canônica de Jordan se

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & M_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & M_m \end{bmatrix}$$

em que cada M_i representa um bloco de Jordan.

Teorema 4.2.1. *Dada $A \in \mathbb{R}$, existe uma matriz não singular (matriz quadrada que admite inversa) X , tal que*

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & M_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & M_m \end{bmatrix}$$

em que cada M_i representa um bloco de Jordan.

Demonstração 9 (LIMA,2018. pg.326).

A demonstração foi apenas referenciada, devido ao fato de exigir-se outros conceitos matemáticos de um nível mais avançado do que a pesquisa propõe.

4.3 Decomposição em valores singulares

Nesse tópico será desenvolvido uma extensão das fatorações utilizadas com mais frequência em cálculos numéricos, válido para toda a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denominada decomposição em valores singulares.

Definição 4.3.1. *Os valores singulares $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r$ de uma matriz A , do tipo $m \times n$, são as raízes quadradas positivas dos valores próprios λ_i da matriz de Gram $K = A^T A$, isto é, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$.*

Dada a matriz A do tipo $m \times n$, com $m \geq n$, sem perda de generalidade, se

$$A = U \Sigma V^T \quad (4.1)$$

Sendo U e V , $m \times r$ e $n \times r$ são matrizes cujas colunas são ortonormais e onde Σ é matriz diagonal $r \times r$.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

então diremos que $U \Sigma V^T$ é a decomposição em valores singulares de A .

Teorema 4.3.1. *Qualquer matriz admite uma decomposição em valores singulares.*

Demonstração 10. *Seja A uma matriz $m \times n$, então $A^T A$ é uma matriz simétrica. Logo, seus autovalores são todos reais e ela tem uma matriz diagonalizante ortogonal V . Além disso, seus autovalores devem ser todos não negativos. Para verificar isto, seja λ um autovalor de $A^T A$ e v um autovetor associado a λ . Segue-se que*

$$\|Av\|^2 = v^T A^T A v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2$$

.

Logo,

$$\lambda = \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} \geq 0$$

Podemos supor que as colunas de V tenham sido ordenadas de modo que os autovalores correspondentes satisfaçam

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_r > 0$$

.

Os valores singulares de A satisfazem $\sigma_i = \sqrt{\lambda_j} > 0$, para $j = 1, \dots, n$

Seja r o posto da matriz A . A matriz $A^T A$ também terá posto r . Como $A^T A$ é simétrica, seu posto é igual ao número de autovalores não nulos. Logo,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_r > 0$$

e

$$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$$

A mesma relação vale para os valores singulares:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \sigma_r > 0$$

e

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_n = 0$$

Assim sejam

$$V_1 = (v_1, \cdots, v_r), \quad V_2 = (v_{r+1}, \cdots, v_n)$$

e

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

Portanto, Σ_1 é uma matriz diagonal $r \times r$ cujos elementos diagonais são todos valores singulares não nulos $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$. A matriz $n \times n$, Σ é então dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

Os vetores coluna de V_2 são autovalores de $A^T A$ associados a $\lambda = 0$. Logo,

$$A^T A v_j = 0, \quad j = r+1, \cdots, n$$

e, em consequência, os vetores coluna de V_2 formam uma base ortogonal para $N(A^T A) = N(A)$. Portanto,

$$A V_2 = O$$

e como V é uma matriz ortogonal, segue-se que

$$I = V V^T = V_1 V_1^T + V_2 V_2^T \quad (4.2)$$

$$A = A I = A V_1 V_1^T + A V_2 V_2^T = A V_1 V_1^T \quad (4.3)$$

Até agora mostramos como construir as matrizes V e Σ da decomposição em valores singulares. Para completar a demonstração, devemos mostrar como construir uma matriz ortogonal $m \times m$, U , tal que

$$A = U\Sigma V^T$$

ou, de forma equivalente,

$$AV = U\Sigma \quad (4.4)$$

comparando as r primeiras colunas em cada membro de (4.4), vemos que

$$Av_j = \sigma_j u_j \quad j = 1, \dots, r$$

Logo, se definirmos

$$u_j = \frac{1}{\sigma_j} Av_j \quad j = 1, \dots, r \quad (4.5)$$

e

$$U_1 = (u_1, \dots, u_r)$$

então, segue-se que

$$AV_1 = U_1 \Sigma_1 \quad (4.6)$$

Os vetores coluna de U_1 formam um conjunto ortonormal, considerando i, j tais que $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$ temos:

$$\begin{aligned} u_i^T u_j &= \left(\frac{1}{\sigma_i} v_i^T A^T \right) \left(\frac{1}{\sigma_j} Av_j \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^T (A^T Av_j) \\ &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} v_i^T v_j \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Segue-se que de (4.5) que cada u_j , $1 \leq j \leq r$, está no espaço coluna de A . A dimensão do espaço coluna é r , assim, $u_1, \dots, u_r$ formam uma base ortonormal para $R(A)$. O espaço vetorial $R(A)^\perp = N(A^T)$ tem dimensão $m - r$. Seja $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m$ uma base ortonormal para $N(A^T)$ e faça-se

$$U_2 = (u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m)$$

$$U = [U_1 \ U_2]$$

Segue-se que $u_1, \dots, u_m$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^m$. Logo, U é uma matriz ortogonal. Ainda precisamos mostrar que $U\Sigma V^T$ realmente é igual a A . Isto segue-se de (4.6) e (4.4), pois

$$\begin{aligned} U\Sigma V^T &= \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \\ &= U_1 \Sigma_1 V_1^T \\ &= AV_1 V_1^T \\ &= A \end{aligned}$$

□

Observação 4.3.1. *Seja A uma matriz $m \times n$ com uma decomposição em valores singulares $U\Sigma V^T$.*

1. *Os valores singulares $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de A são únicos; entretanto, as matrizes U e V não são únicas.*
2. *Como V diagonaliza $A^T A$, segue-se que os v_i são autovetores de $A^T A$.*
3. *Como $A^T A = U\Sigma\Sigma^T U^T$, segue-se que U diagonaliza AA^T e que os u_i são autovetores de AA^T .*
4. *Comparando a j -ésima coluna em cada membro da equação*

$$AV = U\Sigma$$

obtemos

$$Av_j = \sigma_j u_j \quad j = 1, \dots, n$$

De forma similar,

$$A^T U = V\Sigma^T$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} A^T u_j &= \sigma_j v_j && \text{para } j = 1, \dots, n \\ A^T u_j &= 0 && \text{para } j = n+1, \dots, m \end{aligned}$$

Os v_j são chamados de vetores singulares direitos de A e os u_j são chamados de vetores singulares esquerdos de A .

Exemplo 4.3.1. *Encontrar uma decomposição por valores singulares para a seguinte matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

e encontramos seus autovalores $\lambda_1 = 40$, $\lambda_2 = 10$, com os correspondentes autovetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normalizamos eles e obtemos

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Os valores singulares de A são $\sigma_1 = 2\sqrt{10}$, $\sigma_2 = \sqrt{10}$. Logo,

$$\Sigma = \sqrt{10} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad V = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos U , calculamos

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esses vetores já formam uma base ortonormal (a base canônica) para $\mathbb{R}^2$, assim, temos

$$U = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, temos que a decomposição em valores singulares é da forma

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$$

5 APLICAÇÃO

A decomposição em valores singulares é bastante utilizada em diversas áreas. Segundo Oliveira (2016), ela é utilizada, por exemplo, para um conjunto de dados reais de uma técnica de imagens funcionais por ressonância magnética (fMRI), que produz uma série de imagens enquanto o paciente realiza o procedimento, imagens essas muito grandes, podendo assim dificultar a observação do real problema, sendo necessária a utilização de algoritmos computacionais independentes, que já utilizam a decomposição em valores singulares para otimizar o processo, para diminuir a resolução dessas imagens, tendo em vista que o contraste da imagem não é proporcional a seu tamanho. A decomposição em valores singulares então irá reconstruir a imagem gerada pela ressonância magnética, possibilitando reduzir o custo computacional deste procedimento.

Utilizando procedimentos computacionais baseado na decomposição em valores singulares, já foram, de acordo com Oliveira (2016), desenvolvidos algoritmos que identificam padrões numéricos para reconhecimento de faces humanas, fazendo com que, de um conjunto de imagens que serão representadas como matrizes por algum software, onde a decomposição em valores singulares irá ser utilizada para relacionar distâncias entre determinadas características, que significam padrões, possam ser utilizados na identificação de faces.

A decomposição em valores singulares pode ser ainda utilizada para fazer redução do dimensionamento de dados. Ela pode, por exemplo, ser utilizada para que uma imagem vista em 3D seja vista em 2D, além disso, ela pode ser utilizada para o cálculo do posto de uma matriz de vista computacional, segundo Poole (2004), a ideia básica é a de que as matrizes ortogonais U e V da decomposição em valores singulares preservam o comprimento e, portanto, não introduzem nenhum erro adicional; qualquer erro que houver tenderá a aparecer na matriz Σ . A decomposição em valores singulares pode ser utilizada também para o cálculo da norma de matrizes, do número condicional¹ de uma matriz invertível, da pseudo-inversa² de uma matriz e para a aproximação por mínimos-quadrados.

5.1 Octave

Nesta seção iremos discorrer acerca do software utilizado na compressão de imagem digital com decomposição em valores singulares. Foi desenvolvido por volta de 1988 por James B. Rawlings da Universidade de Wisconsin-Madison e John G. Ekerdt da Uni-

¹ O número de condição "mede" quão sensível é uma matriz a erros acumulados ao utilizá-la em cálculos computacionais.

² É uma espécie de inversa definida para matrizes não-quadradas.

versidade do Texas, com o objetivo de complementar um livro de nível de graduação em design de reator químico. Apesar de seu objetivo durante o seu desenvolvimento ser limitado a um assunto, o software acabou sendo uma ferramenta bastante flexível, contando hoje com diversas possibilidades de desenvolvimento em ambientes matemáticos, tendo suas possíveis aplicações a matrizes, vetores, funções, equações diferenciais e até mesmo estatística. E, por se tratar de um software gratuito, acaba por ser uma espécie de "Matlab gratuito", pois consegue desenvolver diversas funções similarmente ao Matlab, que por sua vez é pago. Segundo os desenvolvedores do Octave, ele tem por volta de 95% de compatibilidade com o Matlab.

O Octave é um software livre, que apesar de conter algumas limitações relacionadas à liberdade de utilização do conteúdo fornecido. Tais limitações podem ser encontradas na licença geral pública de GNU, que já vem com o software quando adquirido. Para adquiri-lo pode-se consultar a FSF (Free Software Foundation), que é uma organização sem fins lucrativos, fundada em 4 de Outubro de 1985 por Richard Stallman e que se dedica a eliminação de restrições sobre a cópia, estudo e modificação de programas de computadores. Além disso, o software encontra-se disponível na Internet, e pode ser obtido através do endereço eletrônico [<https://www.gnu.org/software/octave/download.html>](https://www.gnu.org/software/octave/download.html), com informação adicional no site [<https://gnu.org/software/octave/>](https://gnu.org/software/octave/).

5.2 Comprimindo uma imagem

Segundo Mathews (2014), quando estamos vendo a cor branca no display de um computador, na verdade, apesar de estarmos vendo branco, essa cor trata-se de amarelo, e, quando vemos uma imagem colorida, na realidade trata-se de uma mistura das cores vermelho, verde e azul, distribuídas em pequenos pixels no monitor, para que nosso cérebro pense que se tratam de cores diferentes quando observamos de uma certa distância da imagem.

Pelo fato do monitor ser naturalmente uma espécie de agrupamento retangular de números, podemos então representar esse agrupamento retangular de números como uma matriz, assim como Lima (2018) define.

O posto de uma matriz é calculado por redução nas linhas para a forma escalonada para, posteriormente, se contar o número de linhas não nulas, entretanto, durante esse processo pode-se acabar ocorrendo erros de arredondamento. Elementos que deveriam ser zero, por exemplo, podem acabar sendo números muito pequenos, interferindo no momento de se calcular o posto com precisão. A decomposição em valores singulares pode ser utilizada para encontrar o posto de uma matriz, já que ela é muito confiável quando erros por arredondamento estão presentes. Como, para Poole (2004), as matrizes ortogonais U e V da decomposição em valores singulares preservam o comprimento, o

posto de uma matriz do ponto de vista computacional será igual a quantidade de valores singulares escolhidos.

As cores vermelho, verde e azul copõem matrizes em blocos da imagem, da qual estão separadas em postos de 0 a 255, onde o 0 corresponde a nenhuma imagem e o 255 a imagem original. A imagem também pode ser escrita no sistema hexadecimal no formato `#F5C78A`, por exemplo. No sistema hexadecimal, A tem valor 10, e F tem valor 15, entretanto $0F = 15$ e $A0 = 16$. Os dois primeiros números correspondem a valores da cor vermelha, os dois próximos a valores da cor verde e os dois últimos correspondem aos valores da cor azul. Abaixo seguem alguns exemplos de como referenciar as cores:

- `#000000` = Preto
- `#FFFFFF` = Branco
- `#A0A0A0` = Cinza
- `#FF0000` = Vermelho
- `#00FF00` = Verde
- `#0000FF` = Azul

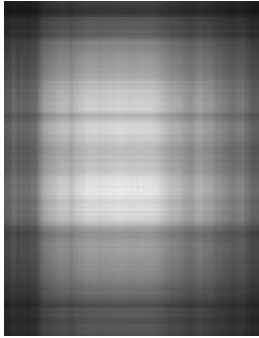
Para utilizarmos uma imagem em preto e branco, temos que os valores das cores vermelho, verde e azul serão os mesmos. Portanto, precisamos representar a imagem através de pixels que vão de 0 a 255, e no sistema hexadecimal de 00 a FF, daí repetem-se os valores das cores vermelho, verde e azul que correspondem as tonalidades de cinza da imagem. Para utilizarmos a decomposição em valores singulares para calcular a precisão da imagem capturada na memória do computador, se tivermos, por exemplo, uma imagem de 100×100 pixels, nós podemos visualizar uma boa aproximação com um posto de 10 apenas.

O que acontece é que a compressão de imagens irá organizar as informações da imagem em blocos das mais às menos importantes, similar a decomposição de Jordan, com a diferença de que irá utilizar da decomposição em valores singulares, uma vez que o menor valor singular na decomposição em valores singulares da matriz representa as partes menos relevantes da imagem. Sendo assim, suponha a decomposição em valores singulares de A na forma de produto externo

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

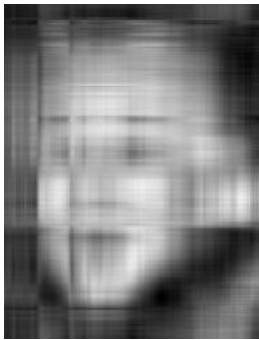
Seja $k \leq r$ e definindo $A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$. Então, A_k é uma aproximação de A que corresponde a manter somente os primeiros k valores singulares e os correspondentes vetores singulares. Para nosso exemplo iremos decompor uma imagem de Albert Einstein.

Figura 1 – Utilizando 1 valor singular



Fonte: Autor.

Figura 3 – Utilizando 4 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 5 – Utilizando 8 valores singulares



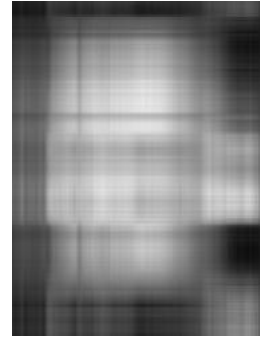
Fonte: Autor.

Figura 7 – Utilizando 12 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 2 – Utilizando 2 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 4 – Utilizando 6 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 6 – Utilizando 10 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 8 – Utilizando 14 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 9 – Utilizando 16 valores singulares



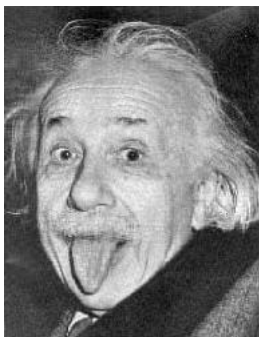
Fonte: Autor.

Figura 11 – Utilizando 20 valores singulares



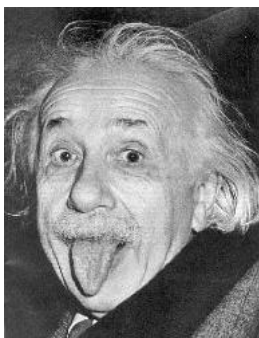
Fonte: Autor.

Figura 13 – Utilizando 50 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 15 – Utilizando 100 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 10 – Utilizando 18 valores singulares



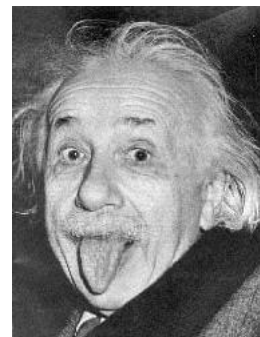
Fonte: Autor.

Figura 12 – Utilizando 25 valores singulares



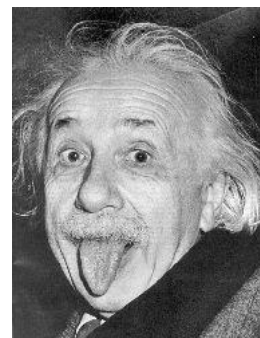
Fonte: Autor.

Figura 14 – Utilizando 75 valores singulares



Fonte: Autor.

Figura 16 – Imagem Albert Einstein original

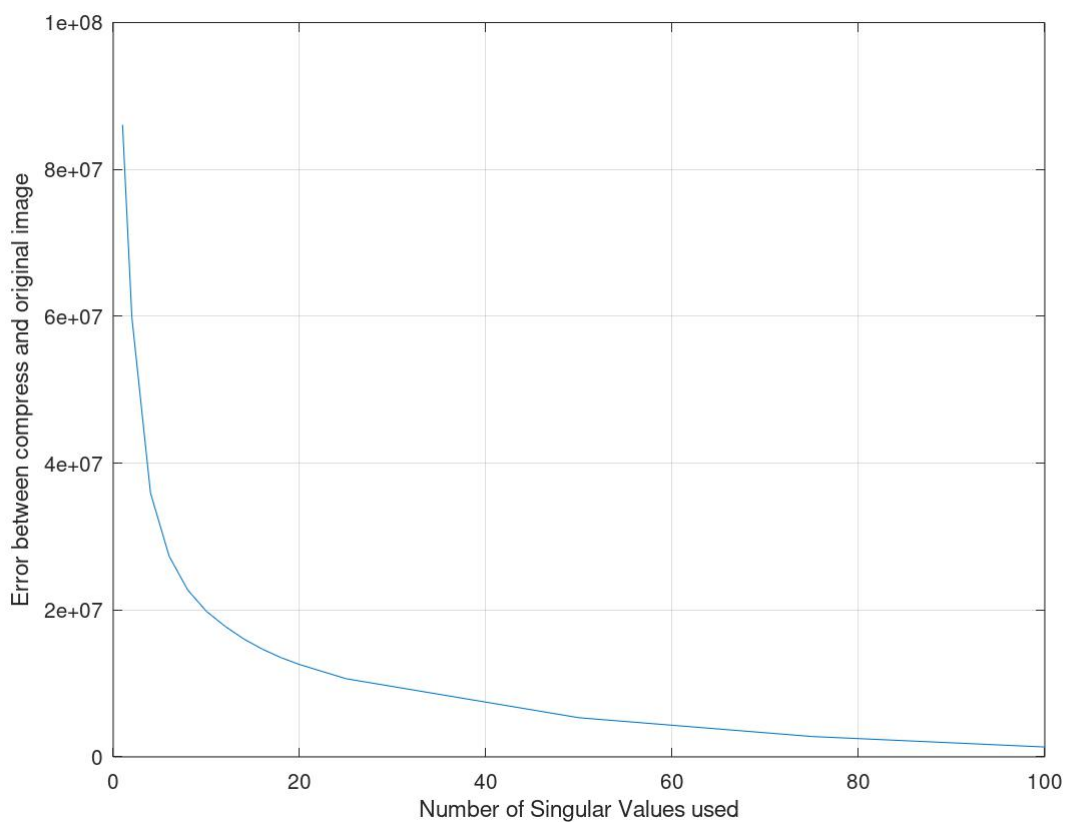


Fonte: Autor.

A decomposição foi feita inicialmente com um pequeno intervalo entre as escolhas

das quantidades de valores singulares. A partir de 25 valores singulares, foram aumentando a quantidade nessa proporção, para que se pudesse notar a melhoria na qualidade da imagem. Sendo assim, uma decomposição utilizando 25 valores singulares já obtém uma boa aproximação da imagem original. Na figura abaixo esta representado o erro gerado na compressão da imagem quando se utiliza o software GNU Octave. Nota-se que a partir de 80 valores singulares o erro gerado é bem baixo, sendo então uma boa aproximação para a imagem original.

Figura 17 – Escala de erros na compressão da imagem em preto e branco

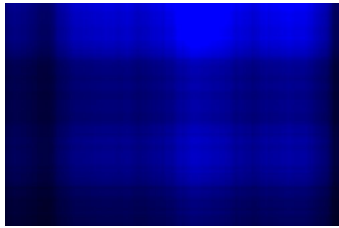


Fonte: Autor

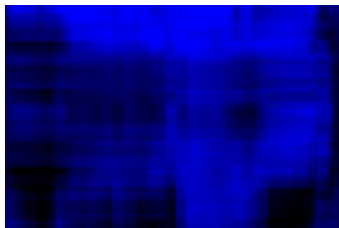
De maneira similar irá ocorrer com as imagens coloridas. As cores vermelho, verde e azul irão compor matrizes em blocos da imagem, onde, para cada uma dessas cores, será realizado o processo utilizado nas imagens em preto e branco, fazendo com que a decomposição seja composta pela compilação das decomposições de cada uma das cores. Para nosso exemplo utilizaremos a imagem de um hibisco, uma flor.

Primeiro é feito o procedimento similar ao que ocorreu com a imagem em preto e branco, mas agora com a imagem do hibisco toda em azul.

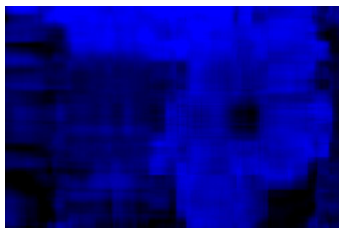
Figura 18 – Utilizando 1 valor singular



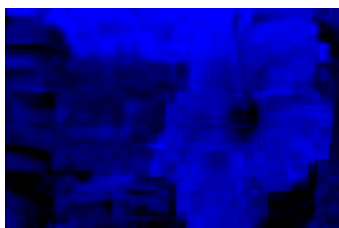
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 20 – Utilizando 4 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 22 – Utilizando 8 valores singulares

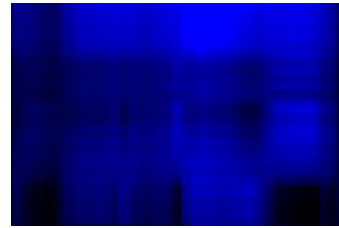


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 24 – Utilizando 12 valores singulares

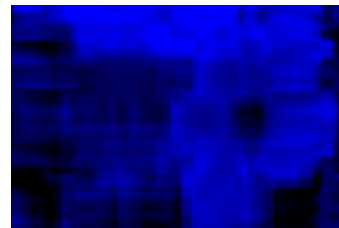


Fonte: Elaboração do próprio autor.

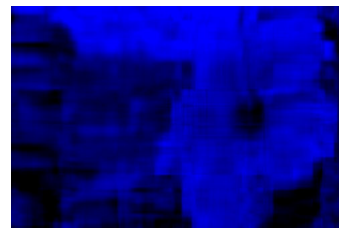
Figura 19 – Utilizando 2 valores singulares



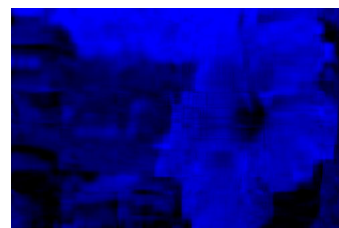
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 21 – Utilizando 6 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 23 – Utilizando 10 valores singulares

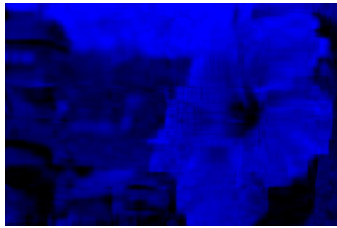


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 25 – Utilizando 14 valores singulares

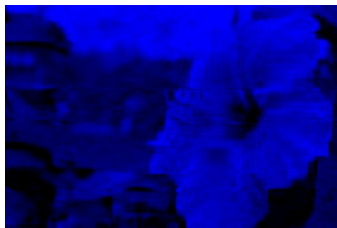


Fonte: Elaboração do próprio autor.

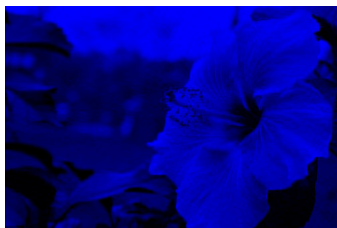
Figura 26 – Utilizando 16 valores singulares



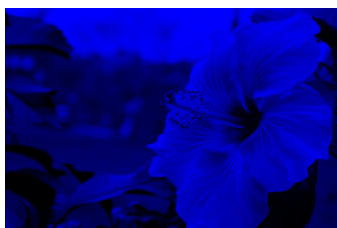
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 28 – Utilizando 20 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 30 – Utilizando 50 valores singulares

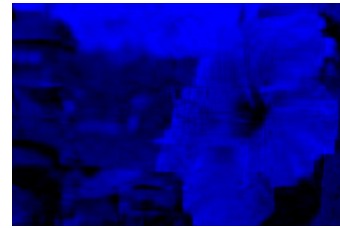


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 32 – Utilizando 100 valores singulares

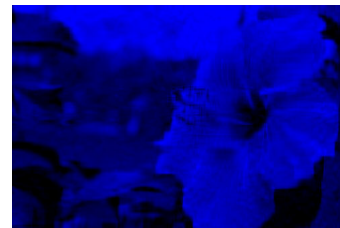


Fonte: Elaboração do próprio autor.

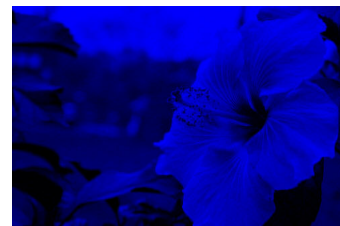
Figura 27 – Utilizando 18 valores singulares



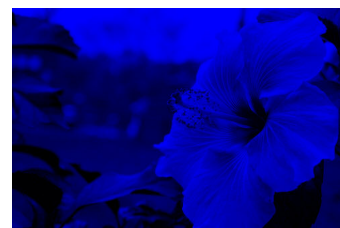
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 29 – Utilizando 25 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 31 – Utilizando 75 valores singulares



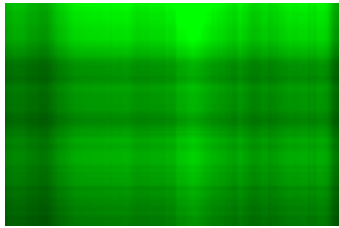
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 33 – Imagem hibisco azul



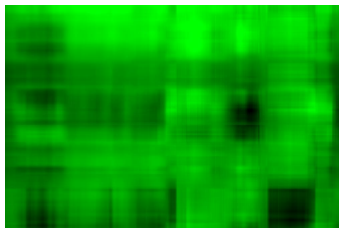
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Depois o procedimento é repetido, mas agora com a imagem do hibisco toda em verde.

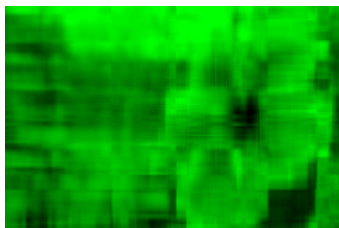
Figura 34 – Utilizando 1 valor singular



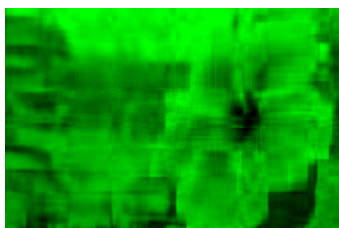
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 36 – Utilizando 4 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 38 – Utilizando 8 valores singulares

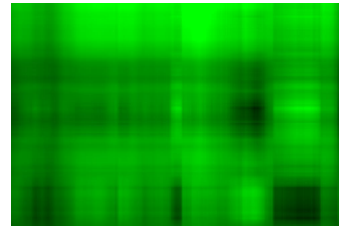


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 40 – Utilizando 12 valores singulares

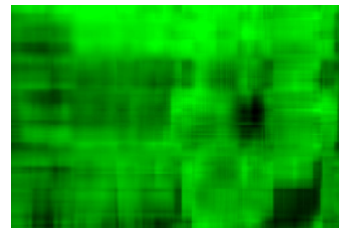


Fonte: Elaboração do próprio autor.

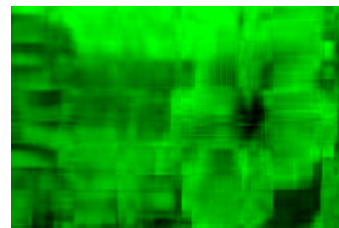
Figura 35 – Utilizando 2 valores singulares



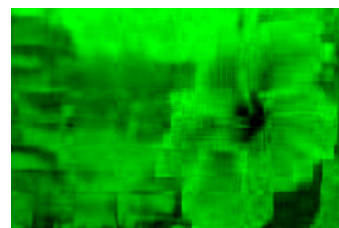
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 37 – Utilizando 6 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 39 – Utilizando 10 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 41 – Utilizando 14 valores singulares

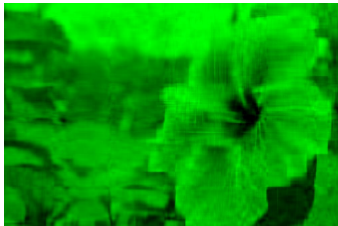


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 42 – Utilizando 16 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 44 – Utilizando 20 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 46 – Utilizando 50 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 48 – Utilizando 100 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.

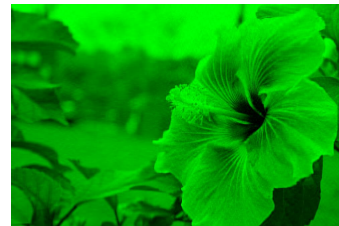
Figura 43 – Utilizando 18 valores singulares



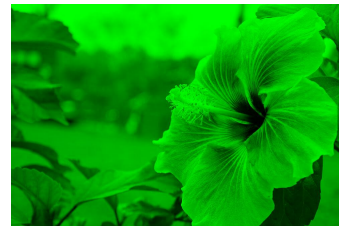
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 45 – Utilizando 25 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 47 – Utilizando 75 valores singulares



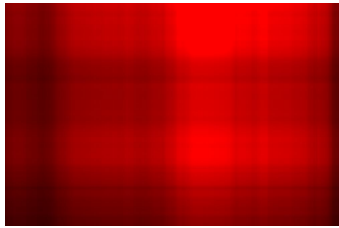
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 49 – Imagem hibisco verde



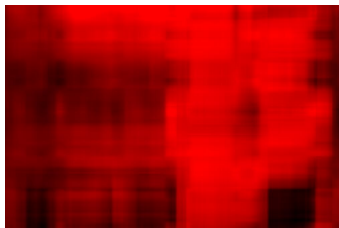
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Depois o procedimento é repetido novamente, mas agora com a imagem do hibisco toda em vermelho.

Figura 50 – Utilizando 1 valor singular



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 52 – Utilizando 4 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 54 – Utilizando 8 valores singulares

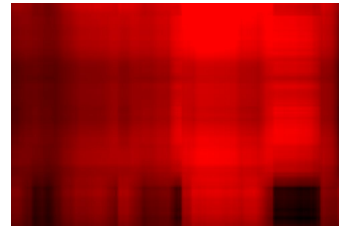


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 56 – Utilizando 12 valores singulares

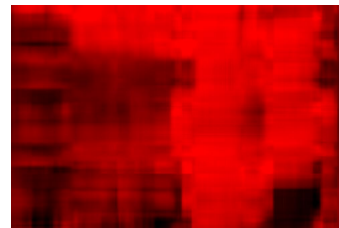


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 51 – Utilizando 2 valores singulares



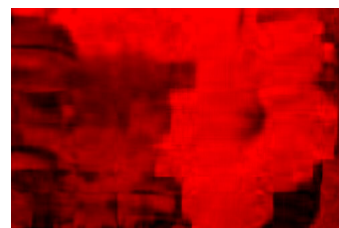
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 53 – Utilizando 6 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 55 – Utilizando 10 valores singulares

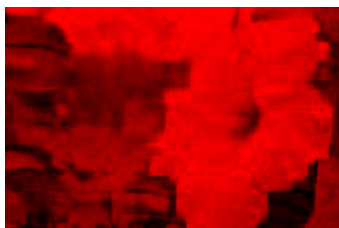


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 57 – Utilizando 14 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.

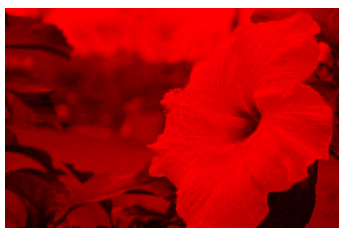
Figura 58 – Utilizando 16 valores singulares



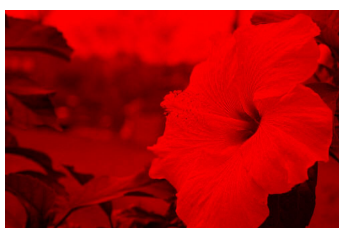
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 60 – Utilizando 20 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 62 – Utilizando 50 valores singulares

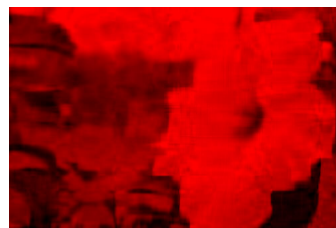


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 64 – Utilizando 100 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.

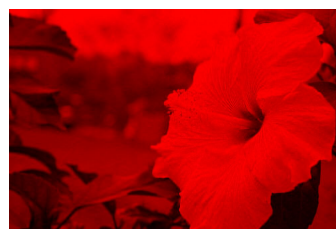
Figura 59 – Utilizando 18 valores singulares



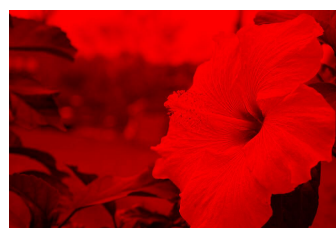
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 61 – Utilizando 25 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 63 – Utilizando 75 valores singulares



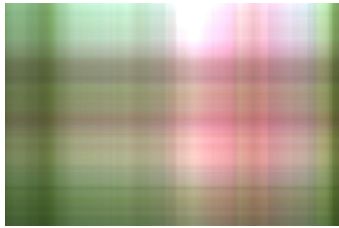
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 65 – Imagem hibisco vermelho



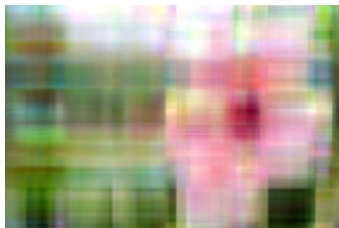
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Finalmente, as imagens em azul, verde e vermelho são compiladas numa só imagem coloriada.

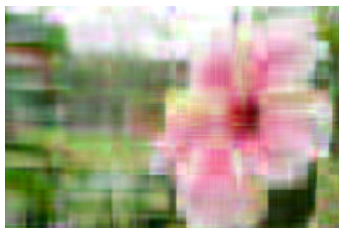
Figura 66 – Utilizando 1 valor singular



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 68 – Utilizando 4 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 70 – Utilizando 8 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 72 – Utilizando 12 valores singulares

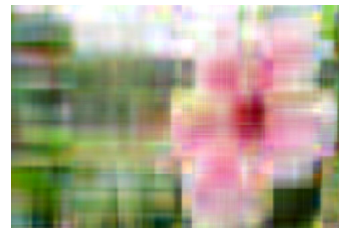


Fonte: Elaboração do próprio autor.

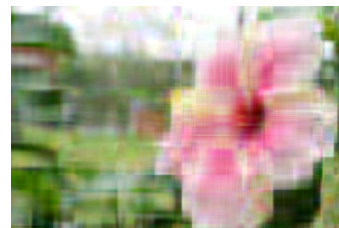
Figura 67 – Utilizando 2 valores singulares



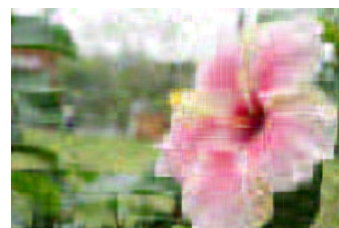
Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 69 – Utilizando 6 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 71 – Utilizando 10 valores singulares

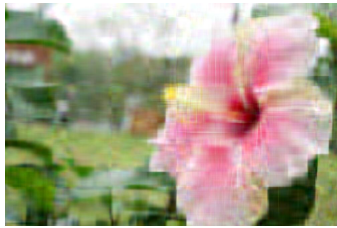


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 73 – Utilizando 14 valores singulares

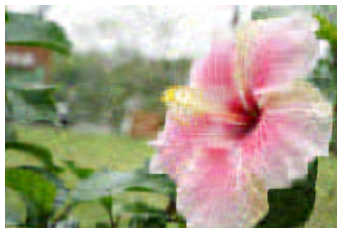


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 74 – Utilizando 16 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 76 – Utilizando 20 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 78 – Utilizando 50 valores singulares

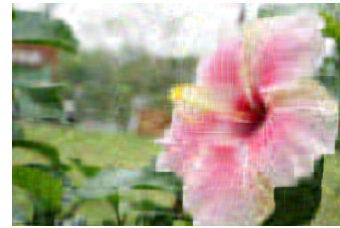


Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 80 – Utilizando 100 valores singulares

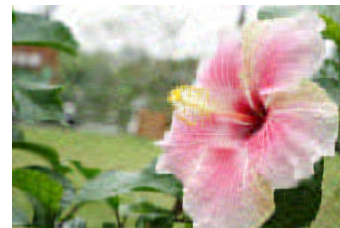


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 75 – Utilizando 18 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 77 – Utilizando 25 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 79 – Utilizando 75 valores singulares



Fonte: Elaboração do próprio autor.
Figura 81 – Imagem hibisco colorido



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Percebemos que a partir de 50 valores singulares já temos uma imagem com uma excelente aproximação, mostrando-nos o quanto pode-se reduzir essas imagens utilizando a decomposição em valores singulares, sejam essas imagens coloridas ou não. Evidentemente, o método para imagens em preto e branco é mais simples, mas, apesar de mais extenso e complexo, o método para imagens coloridas também é bastante eficiente e por se tratar de imagens coloridas pode ser aplicado nos mais diversos casos. O apêndice deste trabalho contém os algoritmos que foram utilizados para realizar a compressão das

imagens, os apêndices foram divididos em dois, sendo que o primeiro contém o algoritmo para a imagens em preto e branco, enquanto o segundo contém o algoritmo para imagens coloridas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram estudados tópicos da matemática que fundamentam a decomposição em valores singulares. A finalidade de ampliar e enriquecer a formação acadêmica referente aos estudos de álgebra linear foi atingida. Além disso, outras formas de decomposição de matrizes foram estudadas, como a decomposição de Schur e de Jordan, que nos mostram a importância dos autovalores para uma matriz, e nos trazem noções importantes para compreensão da decomposição em valores singulares.

Os objetivos específicos deste trabalho voltados para a descrição da técnica de decomposição em valores singulares e a explicação da aplicação da decomposição em valores singulares na compressão de imagem digital, seja essa imagem em preto e branco ou colorida, foram alcançados e contemplaram o objetivo geral: “explorar aplicações da matemática em um nível mais avançado a fim de descrevê-las, analisá-las e interpretá-las matematicamente”.

Além disso, as perguntas do trabalho foram respondidas. Compreendemos que os estudos da álgebra linear podem contribuir para a resolução computacional de problemas relacionados às aplicações reais como exemplificado no corpo do trabalho. A pergunta “Qual é a relevância do estudo da álgebra linear?” também foi respondida, haja vista que suas técnicas são responsáveis por produzir maneiras de se resolver problemas das mais diversas áreas do conhecimento, além daquelas que exemplificamos no trabalho.

É interessante sinalizar que a devida interpretação da forma como a imagem do Albert Einstein e do hibisco foram comprimidas só ocorre por meio do conhecimento da técnica de decomposição em valores singulares e de outros conceitos provenientes da álgebra linear.

Algumas dificuldades ocorreram no momento de compilar todo o material fonte, uma vez que alguns definem ou fazem suas demonstrações com utilização de conceitos que não seriam construtivos para o ideal da pesquisa, por isso foi imprescindível o estudo desses conteúdos de maneira mais aprofundada, para que a pesquisa fosse relevante. Além disso, houve dificuldade na diferenciação entre algumas técnicas de decomposição de matrizes, pois, muitas das vezes, técnicas recebem nomes diferentes em países diferentes, ou até mesmo recebem nomenclaturas diferentes quando aplicadas a uma determinada área, sendo assim, algumas liberdades foram tomadas ao ver que, apesar de receber outro nome, o conceito era o mesmo da técnica estudada, visto que não havia muita discrepância entre elas.

Nessa perspectiva, esperamos que este trabalho possa contribuir para pesquisas posteriores, já que as análises foram realizadas tendo como norte o embasamento teórico

para fundamentar a compressão de imagens digitais. Como já sugerido no texto, há uma gama vasta de outras aplicações de decomposições matriciais nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

As reflexões que podem ser tiradas deste estudo são: a matemática está em constante evolução como ratificado pelos autores citados durante a construção deste trabalho. Nesse sentido, as interpretações de cada fenômeno da natureza, da ciência de um modo geral, devem e necessitam de ferramentas matemáticas, pois a matemática dá significado e modela o mundo.

REFERÊNCIAS

- A. HOWARD AND C. RORRES. **Álgebra Linear com Aplicações**. Bookman, Porto Alegre, 10ª ed., 2012.
- CLINE, A. K.; DHILLON, I. S. **Computation of the Singular Value Decomposition**. CRC Press, 2006.
- COGUBUM, Maria Cristina Tiemi Hamada. **Transmissão de Imagens Utilizando SVD**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática Departamento De Física/Química/Matemática) - Aluno, Sorocaba, 2013. Disponível em: <http://www.matematicasorocaba.ufscar.br/arquivos/tcc-maria-cristina-tiemi.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2019.
- POOLE, D. **Álgebra Linear**. Cengage Learning, São Paulo, 1ª ed. 2004.
- LONGMAN. **Longman Dictionary of Contemporary English**. 1987.
- OXFORD, University Press. **Oxford Advanced Learner's Dictionary**. Oxford. 1990.
- FERREIRA, A. B de H. **Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa**. 8ª ed. Curitiba: Positivo, 2010, 90 p.
- FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.
- GOLUB, G. H.; F. VAN LOAN, Charles. **Matrix Computations**. 2ª Edição. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1989.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2007.
- GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. Rio de Janeiro: Record, 1997.
- ANTON, H.; BUSBY, R. C.. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 1ª edição, 2011.
- HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.
- CAMARGO, I.; BOULOS, P. **Geometria Analítica**. São Paulo: Prentice Hall, 3ª ed., 2005.
- BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. Harper Row do Brasil, São Paulo, 3ª ed., 1980.
- LEON, S. J. **Linear álgebra e aplicações**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2011.
- LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

LYRA-LEITE, Davi Marco; COSTA, João Paulo C. Lustosa da; CARVALHO, João L. A. RECONSTRUÇÃO MELHORADA DE DADOS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA USANDO APROXIMAÇÃO DE ORDEM BAIXA BASEADA EM DECOMPOSIÇÃO POR VALORES SINGULARES. **XXIII Congresso Brasileiro em Engenharia Biomédica**, [S. l.], p. 1-5, 1 out. 2012. Disponível em: https://lasp.unb.br/wp-content/uploads/papers/cbeb2012_davi_svd.pdf. Acesso em: 12 abr. 2019.

MATHEWS, Brady. **Image Compression using Singular Value Decomposition (SVD)**. The University of Utah, [S. l.], p. 1-23, 12 dez. 2014.

OLIVEIRA, Jonilson dos Santos. **A decomposição em valores singulares: Teoria e aplicações**. 2016. Monografia (Especialização em Matemática) - Aluno, Belo Horizonte, 2016. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/handle/1843/EABA-ABFP82>. Acesso em: 12 abr. 2019.

OLIVEIRA, Juliano Vieira de. **Estudo da Decomposição em Valores Singulares e Análise Dos Componentes Principais**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Matemática) - Aluno, Volta Redonda, 2016. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/4173/1/Juliano%20Vieira%20de%20Oliveira%202016-1.PDF>. Acesso em: 12 abr. 2019.

R. L. BURDEN. **Análise Numérica**. Pioneira Thomson Learnig, São Paulo, 1ª ed., 2003.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

TEIXEIRA, Ralph Costa. **Álgebra Linear. Exercícios e soluções**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

A APÊNDICE A

Neste apêndice é apresentado o algoritmo utilizado na decomposição da imagem do Albert Einstein realizada no capítulo de aplicações. Trata-se da decomposição da imagem em preto e branco. Foi adaptado de Mathews (2014), que propunha um algoritmo em MATLAB. Esse algoritmo, no entanto, apresentou erros por ocasião da compilação em GNU Octave. Devido a esse fato, algumas alterações no código foram necessárias para que pudesse compilar corretamente.

A.1 Algoritmo para decomposição de uma imagem em preto e branco

```
%Este documento contém instruções para utilizar o Octave para abrir uma
% imagem e criar outras imagens com decomposição em valores singulares
% numa escala de preto e branco.
% A imagem será dcomposta em valores singulares de
% posto 1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,25,50,75 e 100
close all
clear all
clc
% Para ler e converter a imagem
inImage=imread('image.jpg');
inImage=rgb2gray(inImage);
inImageD=double(inImage);
imwrite(uint8(inImageD), 'original.jpg');
% decompondo a imagem usando decomposição em valores singulares
[U,S,V]=svd(inImageD);
% Usando diferentes numeros de valores singulares (diagonal S) para comprimir e
% reconstruir a imagem
dispEr = [];
numSVals = [];
N = 1
% Escolhendo os valores singulares temporarios
C = S;
% descartando as diagonais com valores que não são utilizados na compressão
C(N+1:end,:)=0;
```

```

C(:,N+1:end)=0;
% Contruindo a imagem com os valores selecionados
D=U*C*V';
% imagem e error computacional
figure;
buffer = sprintf('Image output using %d singular values', N)
imshow(uint8(D));
imwrite(uint8(D), sprintf('%dbw.jpg', N));
title(buffer);
error=sum(sum((inImageD-D).^2));
% selecionando valores para a imagem
dispEr = [dispEr; error];
numSVals = [numSVals; N];

for N=2:2:20
% Escolhendo os alores singulares temporarios
C = S;
% descartando as diagonais com valores que não são utilizados na compresão
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
% Contruindo a imagem com os valores selecionados
D=U*C*V';
% imagem e error computacional
figure;
buffer = sprintf('Image output using %d singular values', N)
imshow(uint8(D));
imwrite(uint8(D), sprintf('%dbw.jpg', N));
title(buffer);
error=sum(sum((inImageD-D).^2));
% selecionando valores para a imagem
dispEr = [dispEr; error];
numSVals = [numSVals; N];
end
for N=25:25:100
% Escolhendo os alores singulares temporarios
C = S;
% descartando as diagonais com valores que não são utilizados na compresão
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;

```

```

% Construindo a imagem com os valores selecionados
D=U*C*V';
% imagem e error computacional
figure;
buffer = sprintf('Image output using %d singular values', N)
imshow(uint8(D));
imwrite(uint8(D), sprintf('%dbw.jpg', N));
title(buffer);
error=sum(sum((inImageD-D).^2));
% selecionando valores para a imagem
dispEr = [dispEr; error];
numSVals = [numSVals; N];
end
% imagem e gráfico do erro
figure;
title('Error in compression');
plot(numSVals, dispEr);
grid on
xlabel('Number of Singular Values used');
ylabel('Error between compress and original image');
S

```

B APÊNDICE B

Neste apêndice é apresentado o algoritmo utilizado na decomposição da imagem de uma flor de *Hibiscus* realizada no capítulo de aplicações. Trata-se da decomposição da imagem colorida. Foi adaptado de Mathews (2014), que propunha um algoritmo em MATLAB. Esse algoritmo, no entanto, apresentou erros por ocasião da compilação em GNU Octave. Devido a esse fato, algumas alterações no código foram necessárias para que pudesse compilar corretamente.

B.1 Algoritmo para decomposição de uma imagem colorida

```
%Este documento contém instruções para utilizar o Octave para abrir uma
% imagem e criar outras imagens com decomposição em valores singulares
%em escalas de cores vermelha, verde e azul.
%A imagem será dcomposta em valores singulares de
%posto 1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,25,50,75 e 100
close all
clear all
clc
filename = 'image.jpg';
[X, map] = imread(filename);
figure('Name','ORIGINAL component of the imported image');
imshow(X);
imwrite(X, '!original.jpg');
R = X(:,:,1);
G = X(:,:,2);
B = X(:,:,3);
Rimg = cat(3, R, zeros(size(R)), zeros(size(R)));
Gimg = cat(3, zeros(size(G)), G, zeros(size(G)));
Bimg = cat(3, zeros(size(B)), zeros(size(B)), B);
figure('Name','RED component of the imported image');
imshow(Rimg);
imwrite(Rimg, '!red.jpg');
figure('Name','GREEN component of the imported image');
imshow(Gimg);
imwrite(Gimg, '!green.jpg');
figure('Name','BLUE component of the imported image');
```

```

imshow(Bimg);
imwrite(Bimg, '!blue.jpg');
Red =double(R);
Green = double(G);
Blue = double(B);
N = 1;
% Computado valores para imagem (vermelho)
[U,S,V]=svd(Red);
C = S;
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
Dr=U*C*V';
% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostre-os
figure;
buffer = sprintf('Red image output using %d singular values', N);
Rimg = cat(3, Dr, zeros(size(Dr)), zeros(size(Dr)));
imshow(uint8(Rimg));
imwrite(uint8(Rimg), sprintf('%dred.jpg', N));
title(buffer);
% Computado valores para imagem (verde)
[U2, S2, V2]=svd(Green);
C = S2;
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
Dg=U2*C*V2';
% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostre-os
figure;
buffer = sprintf('Green image output using %d singular values', N);
Gimg = cat(3, zeros(size(Dg)), Dg, zeros(size(Dg)));
imshow(uint8(Gimg));
imwrite(uint8(Gimg), sprintf('%dgreen.jpg', N));
title(buffer);
% Computado valores para imagem (azul)
[U3, S3, V3]=svd(Blue);
C = S3;
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
Db=U3*C*V3';
% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostre-os

```

```

figure;
buffer = sprintf('Blue image output using %d singular values', N);
Bimg = cat(3, zeros(size(Db)), zeros(size(Db)), Db);
imshow(uint8(Bimg));
imwrite(uint8(Bimg), sprintf('%dblue.jpg', N));
title(buffer);
% Pegue os dados da imagem vermelha, verde e azul
% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostre-os
figure;
buffer = sprintf('Colored image output using %d singular values', N);
Cimg = cat(3, Dr, Dg, Db);
imshow(uint8(Cimg));
imwrite(uint8(Cimg), sprintf('%dcolor.jpg', N));
title(buffer);
for N=2:2:20
    % Recriando modos para imagem vermelha - agora resolvendi para SVD acima
    C = S;
    C(N+1:end,:)=0;
    C(:,N+1:end)=0;
    Dr=U*C*V';
    % Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostre-os
    figure;
    buffer = sprintf('Red image output using %d singular values', N);
    Rimg = cat(3, Dr, zeros(size(Dr)), zeros(size(Dr)));
    imshow(uint8(Rimg));
    imwrite(uint8(Rimg), sprintf('%dred.jpg', N));
    title(buffer);
    % Recriando modos para imagem verde - agora resolvendi para SVD acima
    C = S2;
    C(N+1:end,:)=0;
    C(:,N+1:end)=0;
    Dg=U2*C*V2';
    % Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostre-os
    figure;
    buffer = sprintf('Green image output using %d singular values', N);
    Gimg = cat(3, zeros(size(Dg)), Dg, zeros(size(Dg)));
    imshow(uint8(Gimg));
    imwrite(uint8(Gimg), sprintf('%dgreen.jpg', N));
    title(buffer);

```

```

% Recriando modos para imagem azul - agora resolvendi para SVD acima
C = S3;
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
Db=U3*C*V3';
% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostre-os
figure;
buffer = sprintf('Blue image output using %d singular values', N);
Bimg = cat(3, zeros(size(Db)), zeros(size(Db)), Db);
imshow(uint8(Bimg));
imwrite(uint8(Bimg), sprintf('%dblue.jpg', N));
title(buffer);
% Pague dados para as imagens vermelho, verde, e azul
% Reconstruindo a imagem colorida com os dados correspondentes e mostrando-os
figure;
buffer = sprintf('Colored image output using %d singular values', N);
Cimg = cat(3, Dr, Dg, Db);
imshow(uint8(Cimg));
imwrite(uint8(Cimg), sprintf('%dcolor.jpg', N));
title(buffer);
end
for N=25:25:100
% Recomputando a imagem vermelha - agora resolvendo a SVD acima
C = S;
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
Dr=U*C*V';
% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostrando-os
figure;
buffer = sprintf('Red image output using %d singular values', N);
Rimg = cat(3, Dr, zeros(size(Dr)), zeros(size(Dr)));
imshow(uint8(Rimg));
imwrite(uint8(Rimg), sprintf('%dred.jpg', N));
title(buffer);
% Recomputando a imagem verde - agora resolvendo a SVD acima
C = S2;
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
Dg=U2*C*V2';

```

```

% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostrando-os
figure;
buffer = sprintf('Green image output using %d singular values', N);
Gimg = cat(3, zeros(size(Dg)), Dg, zeros(size(Dg)));
imshow(uint8(Gimg));
imwrite(uint8(Gimg), sprintf('%dgreen.jpg', N));
title(buffer);
% Recomputando a imagem azul - agora resolvendo a SVD acima
C = S3;
C(N+1:end,:)=0;
C(:,N+1:end)=0;
Db=U3*C*V3';
% Recriando os dados de volta para uma imagem exibível e mostrando-os
figure;
buffer = sprintf('Blue image output using %d singular values', N);
Bimg = cat(3, zeros(size(Db)), zeros(size(Db)), Db);
imshow(uint8(Bimg));
imwrite(uint8(Bimg), sprintf('%dblue.jpg', N));
title(buffer);
% Pegua os dados das imagens vermelha,verde e azul
% Reconstruindo a imagem colorida com os dados correspondentes e mostrando-a
figure;
buffer = sprintf('Colored image output using %d singular values', N);
Cimg = cat(3, Dr, Dg, Db);
imshow(uint8(Cimg));
imwrite(uint8(Cimg), sprintf('%dcolor.jpg', N));
title(buffer);
end

```