

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS

CAMPUS PALMAS

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANK ALVES LUSTOSA

INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS DE INTEGRAÇÃO

PALMAS

2020

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS

FRANK ALVES LUSTOSA

INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS DE INTEGRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal do Tocantins
– Campus Palmas, como exigência à obten-
ção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer

PALMAS

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

L968e Lustosa, Frank Alves
 Evolução dos processos de integração / Frank Alves Lustosa. –
 Palmas, TO, 2020.
 75 p. : il. color.

 Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins,
 Campus Palmas, Palmas, TO, 2020.

 Orientador: Me. Edson Luiz Kraemer

 1. História da matemática. 2. Teoria da integração. 3. Integral de
 Riemann. I. Luiz Kraemer, Edson. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.
Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

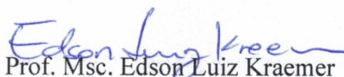
TÍTULO: EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAÇÃO.

AUTORA: Frank Alves Lustosa

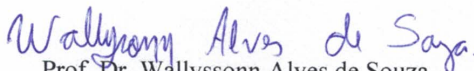
ORIENTADOR: Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas, como parte das exigências para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 14/02/2020.



Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador



Prof. Dr. Wallysson Alves de Souza
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 1



Prof. Me. Gilmar Pires Novaes
UFT – Campus Palmas
Avaliador Externo

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à minha mãe e a toda a minha família que sempre me ajudaram seja com palavras ou com apoio financeiro, o apoio de vocês me deu forças para fazer o máximo que consegui. Em segundo lugar, aos bons professores que tive e que me serviram de inspiração, em especial, aos professores Itamar e Farias que foram meus professores no ensino fundamental e que me permitiram conhecer o IFTO Campus Palmas e, também, ao professor Wallysonn Alves de Souza que me incentivou a estudar cálculo ainda no ensino médio e que me disse que a carreira de professor de matemática valia a pena. Juntamente com outros professores, vocês são a inspiração para que eu me torne um profissional melhor.

A todos os meus colegas de curso com quem pude estabelecer relação de amizade e que puderam me conhecer um pouco melhor deixo aqui meu agradecimento por conhecê-los. Em especial, gostaria de agradecer a Arthur Batista pela inúmeras conversas e oportunidades profissionais, a Dimas Pimentel e José Carlos por muitos eventos em que nos divertimos juntos, a Helom Zive por incontáveis conversas quando eu mais precisava e pelos conselhos e, a Letícia Meneses pela imensa ajuda nos trabalhos das áreas de humanas. Vocês foram os melhores companheiros que eu poderia ter, compartilharam comigo muitas alegrias, frustrações e muitas risadas e isto ficará guardado em minhas memórias. Não poderia deixar de agradecer as minhas irmãs de outras mães Letícia Ferreira da Costa e Mirene da Cruz Silva por terem sido ótimas amigas e ouvintes nesse curso, vocês estiveram comigo quando eu mais precisava, me apoiando de uma forma excepcional e sempre serei muito grato por isso, o mundo precisa de mais pessoas como vocês. Aos outros tantos que convivi e que não foram aqui mencionados saibam que eu aprendi um pouco com cada um e que há algo em mim que aprendi com vocês.

Sou grato a todos pelos ensinamentos e convivência, sem vocês não teria me divertido e aprendido muitas coisas que foram importantes para o meu crescimento pessoal e profissional. Agradeço também ao meu orientador professor mestre Edson Luiz Kraemer que me auxiliou desde a escolha do tema até a escrita desse trabalho, sem dúvidas o senhor fez por mim muito mais que qualquer orientador poderia fazer e isso me fez produzir esse trabalho com mais entusiasmo. Escrever sobre esse tema não foi tarefa fácil e sem dúvida nenhuma eu não teria conseguido sem a ajuda das pessoas acima. Eles foram e são os pilares que me sustentaram e por isso sou grato de verdade a todos, certa vez Newton disse que se viu mais longe foi por estar apoiado sobre ombros de gigantes e eu posso dizer o mesmo sobre o apoio de vocês.

*A maioria dos homens leva uma vida
de desespero silencioso e vai ao túmulo
sem ter expressado sua alma.*

Resumo

O surgimento dos processos de integração foi fundamental para o desenvolvimento de diversas áreas das ciências exatas e para resolução de diversos problemas nas ciências puras e aplicadas. Nesse sentido esse trabalho trata de apresentar uma parte das ideias por trás desse processo fazendo uma breve descrição histórica dos principais matemáticos que contribuíram para a teoria da integração desde Arquimedes até Lebesgue. Focaremos aqui nos fundamentos por trás das ideias da teoria de integração de Riemann e de Lebesgue mostrando que a segunda teoria abrange a primeira e que sana as deficiências da primeira expandindo a classe de funções integráveis. Devida a importância das ideias de Lebesgue faremos aqui um resumo dos principais eventos que culminaram em sua descoberta assim como descreveremos o passo a passo seguido até que sua teoria fosse fundamentada e difundida.

Palavras-chave: História da matemática. Teoria da integração. Integral de Riemann. Integral de Lebesgue.

Abstract

The emergence of integration processes was fundamental for the development of several areas of the exact sciences and for solving several problems in the applied and pure sciences. In this sense, this work tries to present a part of the ideas behind this process, making a brief historical description of the main mathematicians who contributed to the integration theory from Archimedes through Lebesgue. We will focus here on the fundamentals behind Riemann and Lebesgue's integration theory ideas showing that the second theory encompasses and redresses the deficiencies of the first, expanding the class of integrable functions. Due to the importance of Lebesgue's ideas, we will summarize here the main events that culminated in his discovery, as well as describe the step by step followed until his theory was grounded and disseminated.

Keywords: History of mathematics. Integration theory. Riemann integral. Lebesgue integral.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.)	12
Figura 2 – Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)	14
Figura 3 – Sir Isaac Newton (1642-1727)	15
Figura 4 – Agustin-Louis Cauchy (1789-1857)	16
Figura 5 – Georg F. B. Riemann (1826-1866)	17
Figura 6 – Henri Léon Lebesgue (1875-1941)	19
Figura 7 – Soma superior de Darboux	25
Figura 8 – Soma inferior de Darboux	25
Figura 9 – Integral superior de Riemann	68
Figura 10 – Integral inferior de Riemann	68
Figura 11 – Integral de Lebesgue	69

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	UM POUCO DE HISTÓRIA	12
2.1	Antes de Cauchy	12
2.1.1	Arquimedes de Siracusa	12
2.1.2	Gottfried Wilhelm Leibniz	13
2.1.3	Isaac Newton	14
2.2	A contribuição de Cauchy	16
2.3	De Cauchy a Riemann	17
2.4	Lebesgue - Uma nova abordagem para a integração	18
2.5	Contribuições de outros matemáticos	20
3	ASPECTOS MATEMÁTICOS DAS TEORIAS DE CAUCHY E RIEMANN	23
3.1	A Integral de Cauchy	23
3.2	A Integral de Riemann	24
3.3	Bases teóricas da integral de Riemann	25
3.4	Limitações da integral de Riemann	28
4	INTEGRAL DE LEBESGUE	31
4.1	A Integral de Lebesgue de uma função simples	32
4.2	Medida de Lebesgue	35
4.3	Teoria geral da medida	49
4.4	Funções simples	51
4.5	Integração	53
4.6	Propriedades da integral	54
4.7	Comparação com a integral de Riemann	67
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

Por muitos anos, os matemáticos do século XVII tentaram resolver os problemas referentes ao cálculo da tangente em um ponto de uma determinada curva e a área delimitada por essa curva tratando ambos os problemas de forma isolada. Muitos anos se passaram para que começassem a perceber a ligação entre esses problemas.

Tais problemas foram solucionados na Europa com a contribuição de vários matemáticos de diversos países. O Cálculo surgiu a partir da resolução dos problemas citados acima e se tornou uma ferramenta fundamental para a resolução de diversos problemas reais. Muitas controvérsias surgiram ao se tentar definir qual matemático teria sido o precursor na descoberta do Cálculo e, após um longo período de discordância, ficou claro que dois matemáticos fizeram essa descoberta de forma independente.

A descoberta da forma como esses problemas se relacionavam foi o cerne para a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral, que teve seus precursores em Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton. Ambos os matemáticos não foram exatamente os criadores do Cálculo, mas sim, os matemáticos que conseguiram formalizar os conceitos da teoria da integração e diferenciação e, por isso, podem ser chamados de precursores. O Cálculo sofreu a influência de diversos matemáticos e teve sua formalização e principais transformações entre os séculos XVII e XX. No entanto, seu início, por assim dizer, teve suas raízes no uso do Método da Exaustão creditado a Eudoxo de Cnido.

Acreditava-se que a integral de Riemann resolveria os principais problemas do século XIX e que os casos em que essa integral não se aplicava eram considerados casos não críticos, e por isso, não houve muita preocupação em solucioná-los. Mas com a era do rigor matemático, liderada principalmente pelo matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, começou o estudo das funções patológicas, que acabaram por demonstrar a fragilidade da integral de Riemann. Esse problema seria resolvido pelo matemático Henri Lebesgue, em 1902, com sua tese de doutorado em que propunha uma nova forma de definir o processo de integração por meio dos conceitos da Teoria da Medida - um assunto pouco difundido até então - baseados nos trabalhos de Camille Jordan e Émile Borel.

Faremos, nesse trabalho, a apresentação resumida da parte histórica da evolução do conceito de integral, desde seu princípio com o Método da Exaustão, idealizado por Eudoxo e aperfeiçoado por Arquimedes, até a integral de Lebesgue baseada na Teoria da Medida. Devido à importância do Cálculo Diferencial e Integral na resolução de problemas reais e suas aplicações nas diversas áreas das ciências, propomos esse trabalho com o objetivo de mostrar o contexto do seu surgimento e, também, apresentar a integral de Lebesgue que, apesar da sua importância fundamental, é pouco conhecida dos estudantes

em geral.

Sendo assim, dividiremos esse trabalho da seguinte forma: no Capítulo 1, descreveremos uma versão resumida da parte histórica do desenvolvimento do Cálculo citando alguns dos muitos matemáticos que contribuíram para essa área; no capítulo 2, trataremos dos aspectos matemáticos dos trabalhos de Cauchy e Riemann no desenvolvimento das suas noções de integral; e, no último capítulo, faremos a apresentação dos principais elementos necessários para o entendimento da integral de Lebesgue apresentando, por fim, uma comparação entre as integrais de Riemann e de Lebesgue.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Faremos aqui uma breve apresentação histórica situando os principais matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da teoria de integração, desde a criação do Método da Exaustão, até chegar às ideias de Henri Lebesgue.

2.1 Antes de Cauchy

2.1.1 Arquimedes de Siracusa

Figura 1 – Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.)



Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/arquimedes.htm>. Acesso em: 25 nov. 2019.

Arquimedes de Siracusa, Figura 1, é, sem dúvida, um dos primeiros grandes gênios a emprestar seu talento para a construção de algumas ferramentas que viriam a se tornar as bases do desenvolvimento do Cálculo. Segundo (EVES, 2011, p. 192)

Arquimedes, natural da cidade grega de Siracusa, situada na ilha da Sicília, figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos e certamente foi o maior da Antiguidade. Nasceu por volta de 287 a.C. e morreu durante o saque de Siracusa em 212 a.C. Era filho de um astrônomo e desfrutava de alto prestígio junto ao rei Hierão (de quem talvez fosse parente).

Os trabalhos de Arquimedes contribuíram não só para o desenvolvimento da Matemática, mas também para a Hidrostática, a Astronomia, e suas criações de uso no dia a dia ajudaram a facilitar muitos trabalhos árduos. A capacidade criativa de Arquimedes era admirada não só pelos gregos. Segundo (EVES, 2011), durante o cerco à cidade de Siracusa realizado pelos romanos sob o comando do general Marcelo, os inventos de Arquimedes ajudaram a cidade a permanecer uma fortaleza impenetrável por três anos, graças às catapultas móveis com alcance ajustável e guindastes que içavam os navios.

Durante a invasão, conta-se que Arquimedes foi atravessado por uma lança e faleceu. O general Marcelo ficou tão impressionado com a capacidade criativa do gênio por trás das catapultas e dos guindastes que queria conhecê-lo ordenando que sua vida fosse poupada. Ao saber da sua morte, mandou enterrá-lo com as honras e o respeito de um herói.

Durante a sua vida, Arquimedes, além de ter contribuído com inúmeros ramos das ciências exatas, também ficou famoso por suas criações, como a bomba em formato de parafuso usada, segundo (EVES, 2011, p.196), “para irrigar os campos, drenar os charcos, e retirar água dos porões dos navios”. De acordo com (BOYER, 1996), Arquimedes contribuiu para a descoberta do *Princípio Hidrostático*, a *Lei da Alavanca*, conseguiu ainda a medida do círculo por meio da inscrição de polígonos regulares e duplicando, a cada passo, o número de lados do polígono, a triseção de um ângulo, a obtenção da região compreendida por um segmento parabólico, o volume de um parabolóide, além de ainda, segundo (BOYER, 1996, p.85), “escrever um número maior do que o número de grãos de areia necessários para encher o universo”.

Arquimedes publicou inúmeros tratados incluindo, talvez o seu preferido, *Sobre a Esfera e o Cilindro*. Essa predileção talvez possa ser explicada devido ao fato de Arquimedes pedir para gravar em seu túmulo uma esfera inscrita num cilindro circular reto de altura igual ao seu diâmetro. Apesar de não ser o criador do Método da Exaustão - um método que consiste em, dada uma figura cujs área queremos calcular, inscrever nela uma figura poligonal com um grande número de lados e cuja área seja mais fácil de calcular e, com isso, obter uma boa aproximação para a área da figura desejada, Arquimedes soube utilizá-lo com maestria para conseguir resultados extraordinários. Com o uso desse método foi possível descobrir a área de algumas figuras que não eram polígonos regulares, uma aproximação para o valor de π e obter, com boas aproximações, os valores das raízes quadradas.

Para continuar com essa contextualização histórica, avançaremos alguns séculos na história do Cálculo para relatar as realizações de alguns matemáticos do século XVII em diante.

2.1.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, Figura 2, nasceu em Leipzig, em 1646, e ainda muito novo, aprendeu sozinho Latim e Grego. Foi considerado um dos últimos sábios a conseguir conhecimento universal, uma vez que, ainda muito jovem, estudou Teologia, Direito, Matemática e Filosofia. Aos 12 anos de idade, já detinha conhecimento de boa parte da matemática vigente; aos 15, entrou na universidade; aos 17, obteve o grau de bacharel e, aos 20, lhe foi negado o título de doutor em leis.

Após esse episódio, mudou-se para Nuremberg, onde conseguiu seu grau de

Figura 2 – Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm>. Acesso em: 25 nov. 2019.

doutorado na universidade de Altdorf. Escreveu um ensaio sobre o ensino de leis e, devido a isso, foi indicado para o cargo de decodificador de estatutos. A partir daí, até o fim da sua vida, dedicou-se ao serviço diplomático, primeiro servindo ao eleitor de Mainz e depois a serviço da corte de Hanover.

Devido ao serviço diplomático, Leibniz viajou por muitos lugares onde teve a chance de entrar em contato com os mais diferentes cientistas e pesquisadores, como Huygens e Oldenburg. Antes de se tornar bibliotecário e conselheiro do eleitor de Hanover, Leibniz já havia descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo, muitas das regras de diferenciação e definido uma simbologia própria para o Cálculo. A simbologia adotada por Leibniz é utilizada até hoje. Junto com Otto Mencke, criou a *Acta eruditorum*, uma revista na qual publicou muitos dos seus artigos. Seus últimos anos de vida foram marcados pela polêmica envolvendo Isaac Newton, sobre qual dos dois havia sido o precursor do Cálculo.

Essa divergência dividiu os matemáticos da época que, em sua maioria, apoiaram Newton, de modo que por muitos anos, ficou proibido o uso da simbologia adotada por Leibniz. Hoje, sabe-se que ambos desenvolveram o Cálculo, cada qual a seu modo, e que Leibniz foi mais feliz ao escolher de forma cuidadosa sua simbologia.

2.1.3 Isaac Newton

Isaac Newton, Figura 3, nasceu em Woolsthorpe, Lincolnshire, em 1642. O pai de Newton morreu antes do seu nascimento e, após sua mãe se casar novamente, foi criado pela avó e, graças à percepção de um tio que detectou o seu talento incomum para a Matemática, foi estudar no *Trinity College*.

No começo dos seus estudos, Newton não apresentou característica alguma comum de um grande gênio mas, após alguns anos de estudo, sua vida se cercou de grandes

Figura 3 – Sir Isaac Newton (1642-1727)



Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/newton.htm>. Acesso em: 25 nov. 2019.

descobertas. Dentre essas descobertas notáveis, temos: o Teorema Binomial, o Cálculo, a Lei da Gravitação e a Natureza das cores, que se supõem terem sido descobertas durante o período da peste em que o *Trinity College* ficou fechado. Ao que tudo indica, essa história não é verdadeira, e foi contada por Newton para lhe garantir o pioneirismo na descoberta do Cálculo.

A princípio, Newton se interessava por Química mas, ao ler um livro de astrologia, voltou seu interesse para a Matemática. Leu *Os Elementos* de Euclides, *La géométrie* de Descartes, *Clavis* de Oughtred, os trabalhos de Kepler e Viète e *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Após essas leituras, Newton começou a desenvolver sua própria matemática descobrindo o Teorema Binomial Generalizado e criando o método dos fluxos – o atual Cálculo. Newton publicou um artigo sobre Óptica e, após uma imensa polêmica, quase desistiu de publicar outros estudos. Anos mais tarde, voltaria a estar em outra polêmica, agora com Leibniz, sobre quem seria o precursor na criação do Cálculo.

Newton não possuía o costume de publicar os artigos da sua autoria, e muitas das suas descobertas foram publicadas graças ao apoio dos seus amigos com quem ele costumava manter correspondência. Segundo (EVES, 2011, p. 438):

Todas as importantes publicações de Newton, exceto os *Principia*, só apareceram anos depois de o autor descobrir seus conteúdos e quase sempre por pressão de amigos. As datas de publicação dessas obras, em ordem cronológica, são: *Principia*, 1687; *Opticks*, com dois apêndices, *Cubic Curves* e *Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series*, 1704; *Arithmetica universalis*, 1707; *Analysis per series, Fluxiones etc.* e *Methodus differentialis*, 1711; *Lectiones opticae*, 1729; e *The Method of Fluxions and Infinite Series*, traduzido do original latino de Newton por J. Colson, em 1736.

Newton desenvolveu seu Cálculo antes de Leibniz, mas foi o último a publicar, e isso o

envolveu na polêmica já mencionada. Seu trabalho envolvia muitos temas desconhecidos dos matemáticos da época e, além disso, a escolha da sua simbologia tornou seu trabalho de difícil entendimento.

2.2 A contribuição de Cauchy

Figura 4 – Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/cauchy.htm>. Acesso em: 25 nov. 2019.

O matemático francês Augustin-Louis Cauchy, Figura 4, nasceu em 1789, em Paris, e teve a primeira educação fornecida por seu pai, que tinha como amigos Lagrange e Laplace. Devido à recomendação de Lagrange, Cauchy estudou línguas clássicas por dois anos na *École Centrale du Panthéon*, antes de iniciar seus estudos em Matemática. Estudou na *École Polytechnique* e na *École des Ponts et Chaussées*, a fim de se tornar engenheiro civil, mas foi convencido por Lagrange e Laplace a desistir dessa carreira e se dedicar à matemática.

No século XIX, havia um movimento que tentava trazer maior rigor para a Análise Matemática. Lagrange e Gauss foram participantes desse movimento, e Cauchy, considerado um dos maiores analistas do século XIX, contribuiu ampliando e aprofundando esse tema. Dentre as inúmeras contribuições dadas por Cauchy (EVES, 2011, p. 531), escreve:

As numerosas contribuições de Cauchy à matemática avançada incluem pesquisas em convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e física-matemática.

Cauchy publicou inúmeras obras incluindo livros, artigos, a ponto de se igualar a Euler em quantidade de material produzido nos mais diversos campos da Matemática e da Física. Dentre seus livros, temos: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1821; *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, 1823, e *Leçons sur le calcul différentiel*, 1829; nesses livros,

sistematizou o Cálculo formalizando o conceito de limite e definindo a integral por meio do limite da soma de um conjunto infinitamente crescente de partes que tendem para zero segundo (EVES, 2011, p. 532).

Ao definir a noção de integral em termos de limites de somas à esquerda, em vez de uma antiderivada, Cauchy pôde definir o processo de integração de forma independente do processo de derivação. Isso já representava um marco histórico, uma vez que era comum definir ambos os processos como sendo um apêndice do outro. Cauchy utilizava a continuidade de uma função como parâmetro para garantir sua integrabilidade, mas também definiu a integral para funções que apresentam um número finito de pontos de descontinuidade. Essa classe de funções ainda era bem restrita. No entanto, dois matemáticos – George Riemann e Henri Lebesgue – iriam fazer uma ampliação na classe de funções integráveis, e o trabalho de Cauchy serviu de base para que essas novas teorias de integração viessem a existir, e veremos isso com mais detalhes na próxima seção.

2.3 De Cauchy a Riemann

Figura 5 – Georg F. B. Riemann (1826-1866)



Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/riemann.htm>. Acesso em: 25 nov. 2019.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, Figura 5, nasceu em 1826, nos arredores de Hanover, e faleceu em 1866, na Itália, vítima de uma tuberculose, para onde foi a procura de uma melhora para sua saúde. Riemann nasceu frágil e de poucas posses. Mesmo assim, seu pai, um pastor luterano, conseguiu lhe fornecer boa educação estudando na Universidade de Berlim e depois na de Göttingen. Na Universidade de Göttingen, foi aluno de Johann Carl Friedrich Gauss, e obteve seu doutorado sob sua orientação. Na Universidade de Berlim, Riemann teve como mentor o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, que exerceu grandes influências sobre a vida acadêmica de Riemann a ponto

de, ao realizar um exame para conseguir uma vaga equivalente ao de professor titular no Brasil, se propõe a estudar a representação de funções por meio de séries trigonométricas – uma área de estudo do seu mentor.

Durante sua estadia na Universidade de Göttingen, Riemann viria a substituir seu mestre Dirichlet, que antes já havia substituído Gauss. Doutorou-se na Universidade de Göttingen com uma tese na área de funções complexas, onde podem ser encontrados as *equações diferenciais de Cauchy-Riemann* e o conceito de *superfície de Riemann*. Contribuiu para teoria da integração, ao tornar mais claro o conceito de integrabilidade, o que abriria caminho para que mais tarde outros matemáticos expandissem o conceito de integração aumentando a classe de funções integráveis. Ao conseguir o cargo equivalente a professor titular, Riemann conseguiu as condições financeiras suficientes para poder se dedicar à Matemática, no entanto isso duraria poucos anos, pois viria a falecer.

Dentre suas contribuições para a Física, podemos citar o fato de ser um dos primeiros a dar um tratamento matemático para as ondas de choque. Em Matemática, contribuiu com sua famosa *função zeta de Riemann* e conjectura a associada a ela. Contribuiu ainda para a Geometria, a Teoria dos Números e, finalmente, à Análise surgindo com conceitos como o de curvatura de um espaço riemanniano, que seria utilizado nas teorias de Einstein sobre relatividade geral. Em Análise, contribuiu com os estudos sobre as *equações de Cauchy-Riemann* e com o refinamento dado ao conceito de integral.

Riemann utilizou os trabalhos de Cauchy como base, e foi além, ao expandir as classes de funções integráveis. Sua teoria de integração foi considerada por muitos matemáticos como o ápice da Matemática do século XIX, e seu trabalho foi a ferramenta para a solução de diversos problemas e, por isso, obteve uma grande aceitação e se expandiu para as mais diversas partes, sendo utilizada inclusive nos dias de hoje na maioria dos cursos universitários, a ponto de ter uma integral que leva seu nome.

2.4 Lebesgue - Uma nova abordagem para a integração

Henri Léon Lebesgue, Figura 6, nasceu na cidade de Beauvais, na França, no ano de 1875, e morreu em Paris, em 1941. Era filho de uma professora e de um tipógrafo e, durante sua vida, estudou no *Collège Beauvais*, em sua cidade natal, e depois de mudar para Paris, estudou no *Liceu Saint Louis* e no *Louis-le-Grand*.

Anos mais tarde, receberia o título de professor de Matemática pela *École Normale Supérieure*, em 1894. Logo após, se tornou professor no *Lycée Centrale*, onde lecionou até 1902, ano em que publicou sua tese de doutorado intitulada *Intégrale, Longueur, Aire*, que mostrava uma nova forma de definir a Teoria da Integração.

Antes de publicar sua tese em 1902, Lebesgue lançou, em 1901, seu famoso artigo *Generalization Définie Sur une de l'Intégrale*, em que anunciava seus estudos sobre

Figura 6 – Henri Léon Lebesgue (1875-1941)



Fonte: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lebesgue.html>. Acesso em: 25 nov. 2019.

integração trazendo inúmeras afirmações e postulados que seriam demonstrados um ano depois. A ideia de Lebesgue era criar uma nova definição de integral que, além de suprir as deficiências da integral de Riemann iria contê-la como caso particular.

Lebesgue baseou-se nos trabalhos de Camille Jordan e Émile Borel para sua definição de medida e, por meio dela, definiu sua integral. No início, seu trabalho foi duramente criticado por seus colegas, a ponto de gerar dúvidas até mesmo no próprio Lebesgue sobre a validade e generalidade da sua teoria.

Os dois pontos fracos da integral de Riemann são o tratamento dado a funções com um número infinito de pontos de descontinuidade e o fato de que seria interessante se houvesse a alternância entre o limite e o sinal de integral, o que nem sempre acontece. Um dos pontapés iniciais para o estudo de Lebesgue foi o surgimento das funções patológicas – funções que algumas vezes eram contínuas, mas não apresentam derivadas em nenhum de seus pontos, ou então funções cuja derivada não era integrável.

O estudo de tais funções preocupava inúmeros matemáticos, inclusive Henri Poincaré, que afirmou que tal estudo, além de desviar os jovens da resolução de problemas recorrentes para a época, ainda servia apenas para criar funções que invalidavam teorias antes muito bem aceitas. No entanto, esses fatos mostraram a fragilidade da integral de Riemann quando se trata de certas funções, e graças ao trabalho de Lebesgue, a classe de funções integráveis foi ampliada, e atualmente, sua teoria de medida e integração encontrou terreno fértil em diversos ramos das ciências exatas, por exemplo, nas equações diferenciais, cálculo das variações, teoria da probabilidade e análise funcional, de acordo com (COELHO, 2012, p.57).

2.5 Contribuições de outros matemáticos

Faremos aqui alguns comentários sobre outros matemáticos que contribuíram para a Teoria da Integração utilizando como base as referências Boyer (1996), Eves (2011) e Garcia-Oterro e Baroni (2014). Começaremos nossa descrição com Bonaventura Cavalieri. Bonaventura Francesco Cavalieri nasceu em Milão, em 1598, tornando-se, ainda jovem, um jesuado – uma variação da ordem dos jesuítas – e se mudando para um convento dessa ordem tempos depois. Nessa fase, Cavalieri estudou Matemática e teve contato com as obras de Euclides, se tornando aluno de Galileu tempos depois.

Além disso, Cavalieri se tornou diácono e assistente de cardeal, passando a ensinar Teologia até o ano de 1629, em que assumiu o posto de professor na Universidade da Bolonha onde permaneceu até sua morte, em 1647. Cavalieri é famoso por seu *Método dos Indivisíveis* que remonta a Demócrito e Arquimedes.

Cavalieri também é lembrado, principalmente, por seu tratado *Geometria indivisibilibus* publicado em 1635, onde apresenta seu famoso método. Outra ferramenta que leva seu nome são os *Princípios de Cavalieri*, que constituem uma ferramenta eficiente para o cálculo de áreas e volumes.

Dois matemáticos ingleses podem ser considerados os predecessores de Isaac Newton. São eles: John Wallis e Isaac Barrow. John Wallis nasceu em 1616 e morreu em 1703. Acredita-se que foi um dos primeiros a criar um sistema de ensino para portadores de deficiências auditivas, além de ter escrito sobre diversas áreas da Matemática. Foi professor saviiano de Geometria da Universidade Oxford, e seu uso das séries em Análise serviu de base para o matemático Isaac Newton. Wallis foi responsável pela introdução do símbolo de infinito e pela explicação do significado dos expoentes negativos, fracionários e zero.

Isaac Barrow nasceu em Londres, em 1630, e morreu em 1677, em Cambridge, onde foi o primeiro professor a assumir a cátedra lucasiana, renunciando em 1699, pois havia aceitado o convite para se tornar capelão de Carlos II, e para seu lugar indicou o jovem Isaac Newton. Barrow obteve êxito nos estudos sobre Matemática, Teologia, Astronomia e Física. Publicou *Lectiões opticae et geometricae*, onde prova o Teorema Fundamental do Cálculo, o que talvez faça de Barrow um dos primeiros a notar os processos de integração e derivação como inversos.

A famosa família Bernoulli deu grandes contribuições para a Matemática no século XVIII. Dentre os exemplos notáveis, começaremos com os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748). Ao ver os artigos de Leibniz publicados na *Acta eruditorum*, os irmãos logo perceberam o potencial do Cálculo e o aplicaram em diversos problemas. De 1687 em diante, Jakob ocupou o cargo de professor na Universidade da Basileia. Jakob contribuiu para a Matemática com o uso de coordenadas polares, a dedução do raio da curvatura de uma curva plana, o estudo da catenária, além da

descoberta da curva em que um corpo cai com velocidade vertical constante – a *isócrona*. Além disso, é creditado a Jakob a *Distribuição de Bernoulli*, o *Teorema de Bernoulli*, a *Equação de Bernoulli*, os *Números de Bernoulli* e a *Lemniscata de Bernoulli*.

Johann Bernoulli também fez grandes contribuições para a Matemática. Johann deu aulas particulares para o marquês de L'Hospital (1661-1704), que publicou, em seu nome, a famosa *Regra de L'Hospital*, sendo esse um dos primeiros textos sobre Cálculo que fora publicado. Johann escreveu sobre fenômenos ópticos, cálculo exponencial, determinação de trajetórias ortogonais, trigonometria analítica, dentre outros temas. Além disso, Johann teve três filhos – Nicolaus, Daniel e Johann II – e todos se tornaram grandes matemáticos.

O matemático suíço Leonhard Euler nasceu na Basileia, em 1707, e morreu subitamente, em 1783. Euler ficou cego de um olho em 1735, e algum tempo depois, sofreu cegueira total, o que talvez explique a forma como aparece em seus retratos. Apesar dessas infelicidades, Euler ainda continuou muito produtivo, chegando a um total de 530 trabalhos publicados ainda em vida. Além disso, teve 13 filhos, dos quais o mais velho conseguiu algum reconhecimento em física. Um fato interessante é que apesar de grande matemático, Euler nunca ocupou um cargo de professor. Euler era considerado de personalidade simples e modesta, e suas publicações abrangem praticamente todos os campos da Matemática e incluem também outras áreas, como a Física, além disso possuía conhecimentos sobre Astronomia, Química, Teologia, Botânica, Medicina e línguas orientais segundo (EVES, 2011, p.474).

Dentre as muitas contribuições de Euler, podemos citar as inúmeras simbologias inseridas por Euler, como $f(x)$ para funções, e para a base dos logaritmos naturais, i para a unidade imaginária e $\sum$ para somatórios. Muitas ferramentas matemáticas levam o nome de Euler, por exemplo, a *reta de Euler*, o *método de Euler*, o *Teorema de Euler*, a *função ϕ de Euler*. Há a famosa equação de Euler $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, que produz resultados como $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma relação que apresenta alguns dos famosos símbolos matemáticos.

Outro grande matemático, considerado juntamente com Euler como um dos maiores do século XVIII, foi Joseph Louis Lagrange, nascido em Turim, em 1736, e falecido em 1813. Nascido em uma família abastada, Lagrange começou sua carreira muito novo, vindo substituir Euler na Academia de Berlim e, tempos depois, assumiu uma cátedra na Escola Normal, e mais adiante, na Escola Politécnica de Paris. O trabalho de Lagrange teve influência profunda nos matemáticos posteriores. Lagrange foi um dos primeiros a querer dar maior rigor aos fundamentos da Análise. Dentre as várias áreas que tiveram a contribuição de Lagrange, podemos citar a Probabilidade, a Teoria dos Números, a Teoria das Funções, a Mecânica Celeste, as Equações Diferenciais e a Mecânica dos Fluidos.

O matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nasceu em 1815, em Ostefel, e morreu em 1897, em Berlim. Estudou Matemática por si só e, devido ao cargo do seu pai com o serviço de impostos, acabou estudando leis e finanças. Foi

professor secundário e professor da Universidade de Berlim. Após esse período, Weierstrass dedicou-se à Matemática avançada e sob influência de seu professor Guderman, estudou o conceito de convergência de séries. Weierstrass é considerado um dos principais defensores do rigor aplicado nos princípios da Análise, sendo reconhecido pelo uso dos ϵ e δ nas demonstrações formais envolvendo o estudo de funções e séries. Weierstrass também é famoso por mostrar um exemplo de uma função contínua sem derivada em ponto algum – a função de Weierstrass.

3 ASPECTOS MATEMÁTICOS DAS TEORIAS DE CAUCHY E RIEMANN

3.1 A Integral de Cauchy

No século XVIII, surgiram dúvidas quanto ao uso dos processos de derivação. Por exemplo, o matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), em 1822, precisava determinar os coeficientes:

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ e } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

da sua expansão de funções arbitrárias via séries trigonométricas e, para isso, notou que o uso do Cálculo Diferencial era inadequado. Logo, seu foco se voltaria para o cálculo integral.

Em seus estudos sobre séries trigonométricas, Fourier levantou a seguinte hipótese: “seria possível definir $\int_a^b f(x) dx$ para uma função arbitrária f ?” Cauchy tentaria responder essa questão no ano seguinte e, assim como Fourier, começou a pensar no Cálculo Integral dissociado do Cálculo Diferencial.

Cauchy fez avanços significativos ao tornar o Cálculo Integral independente do Cálculo Diferencial. Era costume para a época entender ambos os cálculos de forma vinculada. Essa visão advinha principalmente das ideias de Newton. No entanto, Cauchy seguiu a linha de pensamento mais próxima às ideias de Leibniz, mais ligada à ideia de entender o Cálculo Integral como um somatório que tende a um limite e, com isso, conseguiu desvencilhar o Cálculo Integral do Cálculo Diferencial. Os trabalhos de Cauchy, ao definir o cálculo integral como um somatório à esquerda, trouxeram um avanço ao Cálculo ao produzir mais precisão e, permitiram a Cauchy definir a continuidade como uma condição suficiente para a integrabilidade de uma função.

Sejam $f(x)$ uma função contínua definida em $[a, b]$ e $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Definimos S da seguinte forma:

$$S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

À medida que n cresce, as diferenças entre cada x_n e x_{n-1} se tornam cada vez menores, e o valor de S se aproxima de certo limite fixo, que dependerá basicamente da função $f(x)$ e não da partição escolhida. A esse limite que S assume chamamos de integral definida de Cauchy de $f(x)$ no intervalo (a, b) .

Como definiu o Cálculo Integral de forma independente do Cálculo Diferencial, restava a Cauchy provar sua ligação, e ele o fez por meio do Teorema Fundamental do

Cálculo usando como alicerces o Teorema do Valor Médio para as Integrais e a linearidade entre o processo de integração e a operação de soma. Cauchy foi um dos primeiros a apresentar uma prova rigorosa do Teorema Fundamental do Cálculo, e sua definição de integral foi utilizada por Riemann anos mais tarde para expandir o processo de integração a funções mais gerais que as funções contínuas.

3.2 A Integral de Riemann

Riemann foi outro matemático que se propôs a responder ao questionamento de Fourier sobre que condições seriam necessárias para se garantir que uma função fosse integrável. No entanto, Riemann, primeiramente, começou a esclarecer o que se entendia por $\int_a^b f(x)dx$. Para isso, tomemos uma função $f(x)$ limitada definida no intervalo $[a, b]$, e sejam

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $\delta_n = x_n - x_{n-1}$, e ϵ_n uma fração positiva. Definamos S da seguinte maneira:

$$S = \delta_1 f(a + \epsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \epsilon_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \epsilon_n \delta_n).$$

Essa soma depende dos ϵ e δ escolhidos, mas se os δ se tornarem infinitamente pequenos e se, independente das escolhas dos ϵ e δ , essa soma tender para um valor limite fixo, esse valor será denominado $\int_a^b f(x)dx$.

Faltava, agora, definir quais as condições que uma determinada função deveria satisfazer para ser dita integrável e, para isso, Riemann define, segundo (PALARO, 2006, p.137), os seguintes critérios:

...Para tanto, considera inicialmente uma função f limitada e uma partição de $[a, b]$. Designa por D_i a maior oscilação da função em $[x_{i-1}, x_i]$, ou seja, a diferença entre o maior e o menor valor da função nesse intervalo.

Então, para que $\int_a^b f(x)dx$ exista, a soma $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n$ deve se tornar infinitamente pequena com o maior subintervalo δ da partição tendendo a zero, ficando assim estabelecido o primeiro critério de integrabilidade de Riemann.

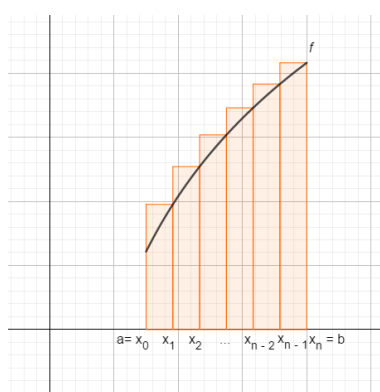
O segundo critério de integrabilidade de Riemann é recíproco ao primeiro; ou seja, se uma função f é sempre limitada, e se, para todos os valores de δ decrescendo indefinidamente, a grandeza total s , dos intervalos nos quais as oscilações da função são maiores que uma quantidade σ dada, podendo ser reduzida indefinidamente, a soma S convergirá quando todos os δ tenderem a zero.

Na notação atual, definimos δ_i por Δx_i e $f(x_{i-1} + \epsilon_i \delta_i)$ por $f(\xi_i)$, em que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Riemann se baseou na construção desenvolvida por Cauchy para definir sua integral, por exemplo, definindo sua integral a partir de uma partição. No entanto, foi mais longe, conseguindo produzir uma função descontínua em um subconjunto denso em $\mathbb{R}$, que é

integrável e, além disso, ampliou a classe das funções integráveis muito além das funções contínuas.

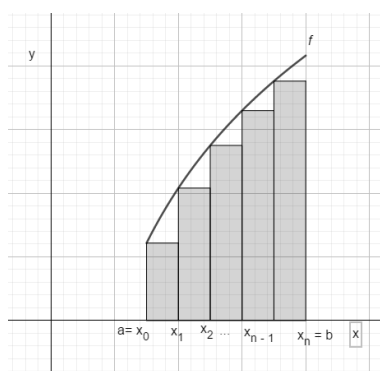
Atualmente, a integral de Riemann pode ser definida por meio das somas inferiores e superiores, ou seja, quando a soma inferior e a soma superior tiverem o mesmo valor, então a função será dita integrável. Esse conceito foi apresentado pelo matemático francês Jean-Gaston Darboux (1842 - 1917) em um dos seus trabalhos, sendo um dos primeiros com o intuito de estender o processo de integração adotado por Riemann. Geometricamente as Figuras 7 e 8 exemplificam melhor esses conceitos:

Figura 7 – Soma superior de Darboux



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 8 – Soma inferior de Darboux



Fonte: elaborada pelo autor

3.3 Bases teóricas da integral de Riemann

As seguintes definições foram extraídas quase que na íntegra de (SILVA, 2017, p.5-6). Algumas modificações foram feitas em relação à simbologia adotada, visando uma escrita mais simples e concisa.

Definição 3.3.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado se existe $c > 0$ tal que $|x| \leq c$, para todo $x \in X$.

Definição 3.3.2. Um conjunto X é enumerável quando:

1. X é finito; ou
2. Existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Corolário 3.3.1. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dos números naturais, inteiros e racionais, respectivamente, são enumeráveis.

Definição 3.3.3. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito compacto se é limitado e fechado.

Definição 3.3.4. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se, para todo $\epsilon > 0$, existem intervalos abertos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon$, onde $l(I_n)$ é o comprimento do intervalo I_n .

Definição 3.3.5. Diz-se que uma propriedade se verifica em quase todo ponto de um conjunto X (denota-se q.t.p. em X) se vale em todo X , exceto em um subconjunto de X de medida nula.

Definição 3.3.6. Uma cobertura aberta de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma coleção $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos abertos tais que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$. Dizemos que uma cobertura aberta $(A_i)_{i \in I}$ de A admite subcobertura finita se existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ tais que $A \subset \bigcup_{j=1}^n A_{i_j} = (A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n})$.

Definição 3.3.7. Seja X um subconjunto não vazio e limitado de $\mathbb{R}$.

1. Um elemento $x \in \mathbb{R}$ é cota superior de X se $x \geq y$, para todo $y \in X$. Se $x \leq y$, para todo $y \in X$, então x é dito cota inferior de X .
2. O supremo do conjunto X , denotado por $\sup X$, é a menor das cotas superiores de X .
3. O ínfimo do conjunto X , denotado por $\inf X$, é a maior das cotas inferiores de X .

Definição 3.3.8. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Uma partição P do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Dadas uma função f e uma partição P , definimos a soma superior de f em relação à P e a soma inferior de f em relação à P pelas seguintes expressões, respectivamente: $S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1})$ e $s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1})$, onde $M_j = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ e $m_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$.

Definição 3.3.9. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e seja $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Definimos $\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}\}$ e chamamos esse número de norma da partição P .

Definição 3.3.10. Sejam P e Q duas partições do intervalo $[a, b]$. Dizemos que Q é um refinamento de P se o conjunto dos pontos que formam Q contém o conjunto dos pontos de P .

Definição 3.3.11. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. A integral superior de f em $[a, b]$, que se denota por $\overline{\int_a^b} f(x)$, é o ínfimo das somas superiores de f em relação a todas as partições de $[a, b]$. A integral inferior de f em $[a, b]$, que se denota por $\underline{\int_a^b} f(x)$, é o supremo das somas inferiores de f em relação a todas as partições de $[a, b]$.

Definição 3.3.12. Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se $\overline{\int_a^b} f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)$. O valor comum das integrais superior e inferior é chamado a integral de f , e se denota por $\int_a^b f(x)dx$.

Definição 3.3.13. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escada em $[a, b]$ se existem uma partição $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, e constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = c_k$, se $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema 3.3.1. Todo subconjunto enumerável dos números reais tem medida nula.

Teorema 3.3.2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f é Riemann-integrável se e só se o conjunto $D(f)$ dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

Teorema 3.3.3. (Teorema de Heine-Borel) Toda cobertura aberta de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ admite subcobertura finita.

Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e $P = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, com $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < b = t_n$, em intervalos do tipo (t_{k-1}, t_k) , e seja $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, com $k = 1, 2, 3, \dots$. Seja f uma função limitada definida em $[a, b]$. Para cada partição P de $[a, b]$, definimos:

$$M_k = \sup\{f(x), \quad t_{k-1} \leq x \leq t_k\},$$

$$m_k = \inf\{f(x), \quad \text{para } t_{k-1} \leq x \leq t_k\},$$

$$S(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta t_k,$$

$$s(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta t_k.$$

Dado que f é limitada, então existem m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Como decorrência desse fato, temos que:

$$m(b-a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M(b-a).$$

Isso mostra que $s(P, f)$ e $S(P, f)$ formam um conjunto limitado. Com esses fatos definimos a integral superior e a integral inferior, respectivamente, da seguinte forma:

$$\overline{\int_a^b} f(x) = \inf S(P, f),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) = \sup s(P, f).$$

Se os valores das integrais superior e inferior são iguais, então dizemos que a função é integrável a Riemann, e denotaremos seu valor por $\int_a^b f(x)dx$.

3.4 Limitações da integral de Riemann

Por muitos anos, a teoria de integração de Riemann foi considerada satisfatória para a aplicação em muitos campos e usada na resolução de inúmeros problemas e, os casos em que essa teoria não se aplicava, não eram considerados críticos. Essa situação mudaria com o período conhecido como *Era do Rigor*, em que se buscava trazer maior rigor à Análise, evitando o uso excessivo da intuição. O matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass foi um dos principais expoentes desse movimento. Além disso, alguns anos antes, Cauchy já dava maior ênfase nos fundamentos que na aplicação, em oposição aos principais matemáticos da época e, por isso, ambos foram duramente criticados.

O estudo da teoria de integração, assim como das séries trigonométricas, deram início ao estudo e à criação de funções especiais conhecidas como funções patológicas, segundo (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014, p.85). Essas funções serviram para demonstrar as deficiências do processo de integração adotado por Riemann, uma vez que, para Riemann, uma função contínua é integrável.

O matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) foi um dos primeiros a apresentar um exemplo de uma função limitada sem derivada em ponto algum. Tal função ficou conhecida função de Dirichlet. A função de Dirichlet é definida do seguinte modo: Seja $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Como o conjunto dos números racionais é denso, assim como o conjunto dos números irracionais, no conjunto dos números reais então todas as partições tomadas terão supremo igual a 1 e ínfimo igual a 0; com isso as somas superior e inferior serão diferentes

e, portanto, essa função não será Riemann integrável, mas será Lebesgue integrável, com integral igual a zero, uma vez que, por ser enumerável o conjunto dos números racionais, terá medida nula.

O próprio Weierstrass apresentou outro exemplo de função patológica. Conta-se que Bolzano teria construído um exemplo parecido. No entanto, seus trabalhos só foram publicados anos depois de Weierstrass mostrar seu exemplo. A função de Weierstrass pode assim ser definida:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi),$$

em que a é ímpar, $b \in [0, 1)$ e $ab > 1 + \frac{3}{2\pi}$.

Outro matemático a dar um exemplo de função contínua sem derivada em ponto algum foi o matemático alemão Bartel Leendert Van der Waerden (1903-1996). Para isso, van der Waerden definiu a seguinte função:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n x\},$$

em que $\{x\}$ define a distância entre x e o inteiro mais próximo.

O matemático Vito Volterra (1860 - 1940) também forneceu um exemplo de função patológica. A função apresentada por Volterra tem a propriedade de apresentar primitiva. No entanto, não é integrável, no sentido de Riemann. Volterra define a seguinte função:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in P \\ f(x, a, b), & \text{se } x \notin P \end{cases},$$

em que P é um conjunto denso em parte alguma do intervalo $(0, 1)$ com medida positiva, e $f(x, a, b)$ é definida da seguinte forma, segundo (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014, p.106-107):

1. $f(a) = f(b) = 0$;
2. se $a < x \leq x_1$, em que x_1 é o maior ponto à direita de a e à esquerda do ponto médio do intervalo no qual a função atinge o valor máximo, então:

$$f(x) = A = (x - a)^2 \sin \frac{1}{x - a};$$
3. se $x_2 \leq x < b$, em que x_2 é o menor ponto à esquerda de b e à direita do ponto médio do intervalo no qual a função atinge o valor máximo. então:

$$f(x) = B = (x - b)^2 \sin \frac{1}{x - b};$$
4. se $x_1 < x < x_2$, então $f(x)$ é constante e igual a $f(x_1) = A_{x_1} = B_{x_2} = f(x_2)$.

Riemann desenvolveu o *Método da Condensação de Singularidades* para mostrar o quão abrangente era sua teoria de integração. Porém, anos mais tarde, o matemático

Hermann Hankel (1839 - 1873), aluno de Riemann, mostrou um exemplo de função patológica e ainda aperfeiçou o método do seu professor e o usou para construir tais funções. Para isso, Hankel tomava uma função que apresentava uma singularidade em algum ponto e construía uma nova função com essa propriedade em um conjunto denso de pontos.

Hankel conseguiu empregar o método de Riemann, que antes era utilizado para mostrar sua generalidade, para evidenciar suas falhas. Além disso, a integral apresentava outro inconveniente que se traduzia no fato da alternância entre o sinal de integral e o de limite, ou seja, dada uma sequência de funções integráveis a Riemann $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ convergindo pontualmente para $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então espera-se que $f(x)$ seja integrável a Riemann, e além disso:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Esse resultado só é válido para o caso em que a convergência é uniforme. Todavia, essa convergência é difícil de ser conseguida, o que traz uma considerável limitação para a integral de Riemann. Essas deficiências fizeram surgir a necessidade de uma nova teoria de integração que solucionasse tais problemas e que contivesse a teoria de integração de Riemann como um caso particular.

A solução para toda essa problemática surgiu quando o matemático francês Henri Lebesgue publicou, em 1901, um artigo antecipando os resultados da sua tese de doutorado, que seria apresentada no ano seguinte. Falaremos mais disso no capítulo que se segue.

4 INTEGRAL DE LEBESGUE

Existem, de acordo com (RUDIN, 1976), várias abordagens para a construção da teoria de integração de Lebesgue. Atualmente, há um bom número de bibliografias em português sobre o tema. A título de exemplo há (ISNARD, 2009) e (MARQUES, 2009). Nesse capítulo, vamos seguir o roteiro de Rudin ¹ e, salvo menção em contrário, todos os resultados aqui apresentados são baseados nessa obra, que é uma referência clássica no idioma inglês sobre o assunto Análise Matemática. Uma coincidência, no entanto, às diversas abordagens, é a de que a construção se dá, basicamente, em três etapas. Primeiro, é estabelecida a integrabilidade das funções simples. Em seguida, a integrabilidade das funções positivas, e após, critérios de integrabilidade para funções quaisquer. É essa linha que seguiremos com a construção. O texto é baseado nas notas de aulas preparadas pelo professor Edson Luiz Kraemer, quando cursou a disciplina de Análise no $\mathbb{R}^n$ no programa de mestrado, em 2001.

Vale mencionar que essa construção é extremamente técnica, e muitos detalhes não são compreendidos, a não ser com uma leitura demorada e acompanhada de várias exemplificações. Diferentemente da integração no sentido de Riemann, que é amplamente conhecida e ensinada em cursos regulares em nível de graduação, a integral de Lebesgue é bastante mais abstrata, e sua plena compreensão exige uma boa dose de estudo e reflexão.

Quanto às definições necessárias para essa construção, todas serão dadas ao longo do texto, à medida que se fizerem necessárias. Dessa forma, a leitura poderá fluir naturalmente, sem necessidade de se retroagir muitas vezes.

Um fato que ficará evidente na leitura é que, na construção da sua teoria de integração, Lebesgue se baseia em dois conceitos primordiais, que são a noção de medida de conjunto e convergência de sequências de funções. Além disso, diferentemente da integral de Riemann, não existe uma versão *segundo Lebesgue* para os métodos clássicos de integração. Isso decorre do fato de que aquelas funções que já eram integráveis segundo Riemann continuarão sendo integráveis no novo sentido (pelos mesmos métodos) e, aquelas que não o eram, sua integração (ou mensuração) dependerá da função envolvida.

Não é nosso objetivo aqui dar a entender que dominamos o assunto, mas que tivemos um contato com ele para minimamente entender às ideias que foram seguidas por Lebesgue, assim como compreender os aspectos geométricos da sua teoria, especialmente quando se trata das funções que são integráveis segundo Riemann, além de Lebesgue integráveis.

¹ O livro *Principles of Analysis Mathematical*, em sua 1ª edição, foi traduzido para o português na década de 1970, mas seus exemplares são raros.

4.1 A Integral de Lebesgue de uma função simples

Para formalizar o conceito enunciado no título dessa seção, começamos definindo o que é uma σ -álgebra de conjuntos.

Definição 4.1.1. *Dado um conjunto X qualquer, uma σ -álgebra de subconjuntos de X é um conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, sendo $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X , tal que são satisfeitas as seguintes condições:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow (X - E) \in \mathcal{A}$;
3. $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{A}$.

Essa definição pode ser assim explicada. A primeira condição é óbvia. A segunda significa que o complementar de um elemento de $\mathcal{A}$ deve também ser elemento de $\mathcal{A}$. Por fim, a terceira condição exige que a reunião de uma coleção enumerável de elementos de $\mathcal{A}$ seja um elemento de $\mathcal{A}$.

Exemplo 4.1.1. *Considere $X = \mathbb{R}$. Os conjuntos $\mathcal{A}_1 = P(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ são dois exemplos imediatos de σ -álgebras de números reais.*

Exemplo 4.1.2. *Dado um espaço métrico X , a σ -álgebra de Borel é a σ -álgebra $\mathcal{B}$ gerada pelo conjunto $\mathcal{S} = \{U \subseteq X : U \text{ é aberto}\}$. Um subconjunto $E \subseteq X$ que pertence à $\mathcal{B}$ é chamado um conjunto Boreliano.*

Um fato importante sobre σ -álgebras é o de que, dado um conjunto $\mathcal{S} \subseteq P(X)$, existe uma σ -álgebra tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, que é a menor possível, a saber, a intersecção de todas as σ -álgebras que contém $\mathcal{S}$.

Definição 4.1.2. *Dada uma σ -álgebra $\mathcal{A}$ sobre um conjunto X , define-se uma medida em $\mathcal{A}$ como sendo uma função:*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

tal que:

1. $\mu\{\emptyset\} = 0$;
2. se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ e $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ tem-se $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$.

Definição 4.1.3. *À tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dá-se o nome de espaço de medida. Um elemento $E \in \mathcal{A}$ é dito um conjunto mensurável.*

Exemplo 4.1.3. A seguir, apresentamos três exemplos de espaços de medida. Em cada caso, considere X um conjunto qualquer (arbitrário), $\mathcal{A} = P(X)$ a σ -álgebra especificada sobre X , $E \in \mathcal{A}$ um elemento da σ -álgebra, e μ a medida definida sobre $\mathcal{A}$.

1. Neste primeiro exemplo, definimos μ como segue: $\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E = \emptyset \\ +\infty, & \text{se } E \neq \emptyset \end{cases}$.

Que μ atende os critérios 1. e 2. da Definição 4.1.2, é bastante óbvio, no caso de 1. e para o segundo item da definição, observemos que $\infty + \infty = \infty$ para uma quantidade enumerável de infinitos.

2. Neste caso, $\mu(E) =$ número de elementos de E .

Novamente, o item 1. é elementar, e o item 2. decorre do fato de que os conjuntos não têm, por hipótese, elementos em comum. Caso um dos conjunto E_i seja infinito, a soma será infinita, ou seja, a medida da união será infinita. No caso de X ser finito, é trivial.

3. Para definir a medida μ , fixe $x_0 \in X$ e faça $\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in E \\ 0, & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$.

Nesse caso, a medida da união será 1, caso $x_0 \in E_i$ para algum E_i , da coleção, ou zero, caso $x_0 \notin E_i$, para nenhum i .

A seguir, um conceito chave de toda a teoria é apresentado: o conceito de função mensurável em um espaço de medida.

Definição 4.1.4. Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita mensurável se, $\forall a \in \mathbb{R}$, temos que $f^{-1}(-\infty, a)$ é mensurável (ou seja, $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{A}$).

Exemplo 4.1.4. Seja f uma função mensurável. Nos termos da Definição 4.1.2, são mensuráveis os seguintes conjuntos:

1. $f^{-1}([a, +\infty))$.
2. $f^{-1}((-\infty, a]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} f^{-1}\left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right)$.
3. $f^{-1}((a, +\infty)) = (f^{-1}((-\infty, a]))^C$.
4. $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, a)) \cap f^{-1}(b, +\infty))$.
5. $f^{-1}(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}$ $\forall U$ aberto. Observação: $U = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i) \Rightarrow f^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(a_i, b_i)$.
6. $f^{-1}(F)$, $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado.
Observação: $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F^C))^C$.

7. $f^{-1}(B)$, onde $B \subseteq \mathbb{R}$ é boreliano.

Seja $\mathcal{B}' = \{E \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.

Provemos que $\mathcal{B}'$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) $\emptyset \in \mathcal{B}'$, pois $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$.

b) $E \in \mathcal{B}' \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \implies (f^{-1}(E))^c \in \mathcal{A} \implies f^{-1}(E^c) \in \mathcal{A} \implies E^c \in \mathcal{B}'$.

c) $E_i \in \mathcal{B}' \forall i \in \mathbb{N}$, com $f^{-1}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(E_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$. Logo, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{B}'$.

Dai, segue que $\mathcal{B}'$ é uma σ -álgebra que contém o conjunto dos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Logo, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Portanto, dado um boreliano $E \subseteq \mathbb{R}$, temos que $E \in \mathcal{B}'$ e, por conseguinte, $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.

Os dois exemplos seguintes fornecem uma importante caracterização de abertos quando a σ -álgebra tomada é a de Borel.

Exemplo 4.1.5. Considere $X = \mathbb{R}$, uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a σ -álgebra $\mathcal{B}$. Como a imagem inversa de um intervalo aberto por uma função contínua é um conjunto aberto, temos que $f^{-1}(-\infty, a)$ é aberto e, portanto, pertence a $\mathcal{A}$.

O resultado do Exemplo 4.1.5 pode ser ampliado para um aberto qualquer em $\mathbb{R}$, como segue.

Exemplo 4.1.6. Na σ -álgebra de Borel, dados $E \subset \mathbb{R}$ e f contínua em E , $f^{-1}(E) \subset \mathcal{B}$, isto é, a imagem inversa de um boreliano por uma função contínua é um boreliano.

A seguir, apresentamos um exemplo de uma função contínua em um aberto de $\mathbb{R}$ para ilustrar o resultado do Exemplo 4.1.6.

Exemplo 4.1.7. Seja $E \in \mathcal{A}$ e $f = 1_E$, em que 1_E representa a função característica definida em E .

$$f^{-1}((-\infty, a)) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } a \leq 0 \\ X - E, & 0 < a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}.$$

Para elucidar esse exemplo, notamos que, se $a \leq 0$, nem 0, nem 1 serão imagens de elementos de X pela função f . Caso $0 < a \leq 1$, apenas os elementos de $X - E$ terão imagem em $(-\infty, a)$ (note que $f(X - E) = \{0\}$). Por fim, caso $a > 1$, como $f(E) = \{1\}$ e $f(X - E) = \{0\}$ e $\{0, 1\} \subset (-\infty, a)$, temos que $f^{-1}((-\infty, a)) = X$.

Teorema 4.1.1. Se f e g são funções mensuráveis, então $\lambda f + g$ são mensuráveis, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

A Definição 4.1.5 abre caminho para a obtenção da integrabilidade, no sentido de Lebesgue, de uma importante classe de funções.

Definição 4.1.5. *Uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função simples se $f(X)$ é um conjunto finito, isto é, se $f(X) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.*

Para as próximas considerações, vamos fixar um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples (portanto, mensurável). Definamos conjuntos E_i de tal forma que $E_i = f^{-1}(\{a_i\})$. Com essa construção, temos que $X = \dot{\bigcup} E_i$, isto é, X é a união disjunta das imagens inversas dos conjuntos unitários, cada um contendo uma das imagens de elementos de X .

Partindo das considerações acima, podemos concluir que toda função simples pode ser escrita como combinação linear da função característica, ou seja, se f é uma função simples, então $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{E_i}$. Desse modo, dado $x \in X$, teremos $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{E_i}(x)$. Essa forma de denotar uma função simples tem vantagens, uma vez que esse mesmo processo pode ser aplicado a qualquer função mensurável, como pode ser visto em (RUDIN, 1976).

A seguir, chegamos a um ponto alto da teoria com a definição da integral de uma função simples positiva em um espaço de medida.

Definição 4.1.6. *Tomemos um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e f uma função simples tal que $f \geq 0$. Defina-se $\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i)$.*

Definição 4.1.7. *Se f mensurável e $f \geq 0$, então $\int_X f(x) d\mu(x) = \sup \int_X s(x) d\mu(x)$, em que s é uma função simples e $0 \leq s \leq f$.*

4.2 Medida de Lebesgue

Nesta seção, será construído o conceito de medida de Lebesgue. Esse conceito é fundamental para a ampliação do espaço de funções integráveis segundo Riemann do espaço das funções limitadas, para o espaço das funções cujo conjunto de descontinuidades tem medida de Lebesgue igual a zero. A construção da medida de Lebesgue se inicia a partir de uma estrutura de anel de conjuntos.

Definição 4.2.1. *Uma família $\mathcal{R}$ de subconjuntos de um dado conjunto X é dito um anel se, $\forall A, B \in \mathcal{R}$, têm-se que:*

1. $A \cup B \in \mathcal{R}$ - A união de elementos de $\mathcal{R}$ está em $\mathcal{R}$;

2. $A - B \in \mathcal{R}$ - A diferença de elementos de $\mathcal{R}$ está em $\mathcal{R}$.

Definição 4.2.2. Se, além de satisfazer a Definição 4.2.1, tivermos que, para toda família enumerável $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ ocorrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$, então $\mathcal{R}$ será dito um σ -anel.

Exemplo 4.2.1. A família $\mathcal{B}$, dos conjuntos boleanos de um espaço métrico, é um σ -anel.

Exemplo 4.2.2. Toda σ -álgebra de conjuntos é um σ -anel, pois $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, se cada $A_n \in \mathcal{A}$. Se $A, B \in \mathcal{A}$ então $A - B = A \cap (B^c)$.

Exemplo 4.2.3. Seja $\mathcal{R}$ a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que podem ser escritos como reunião finita de intervalos limitados.

1. Dados $A, B \in \mathcal{R}$ limitados, é óbvio que $A \cup B \in \mathcal{R}$ é limitado.

2. Agora, considerando $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$ e $B = \bigcap_{j=1}^m I_j$, note que

$$A - B = A \cap B^c = \left(\bigcup_{k=1}^n I_k \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m I_j \right)^c = \left(\bigcup_{k=1}^n I_k \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m I_j^c \right) = \bigcup_{k=1}^n (I_k \cap \bigcap_{j=1}^m I_j^c),$$

que é uma reunião finita de intervalos.

O $\mathcal{R}$ do último exemplo é um anel, mas não é um σ -anel. Isso pode ser verificado observando que a reunião enumerável de intervalos limitados pode não ser limitada. Para ilustrar isso, basta tomar a reunião dos intervalos reais

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, n) = (0, +\infty).$$

Observação 4.2.1. Dado um anel $\mathcal{R}$, note que $\forall A, B \in \mathcal{R}$ temos $A \cap B = A - (A - B)$, $A - A = \emptyset$ e portanto $A - A \in \mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ for um σ -anel e $A_i \in \mathcal{R} \forall i \in \mathbb{N}$, então

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_1 - \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_1 - A_i \right) \in \mathcal{R}$$

Definição 4.2.3. Dado um anel $\mathcal{R}$ de subconjuntos de um conjunto X diz-se que uma função $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ é aditiva se para todos $A, B \in \mathcal{R}$ tais que $A \cap B = \emptyset$ tem-se $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ (Em particular, exigimos que a imagem de φ não contenha $\{+\infty\}$ e $\{-\infty\}$ simultaneamente).

Neste trabalho, consideraremos sempre funções φ positivas, isto que, funções φ tais que $\varphi(A) \in [0, +\infty]$.

Definição 4.2.4. Em um anel $\mathcal{R}$, diremos que uma função aditiva φ é σ -aditiva, quando dada uma coleção enumerável de conjuntos A_i em $\mathcal{R}$, dois a dois disjuntos, tais que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ tivermos $\varphi(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum \varphi(A_i)$.

Para exemplicar a definição consideremos $A_i = (\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ no anel $\mathbb{R}$, dos números reais. É fácil notar que se $i \neq j$, então $A_i \cap A_j = \emptyset$ e que $\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i = (0, 1]$.

Propriedade 4.2.1. Seja um anel $\mathcal{R}$ de subconjuntos de um conjunto X e uma função $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ aditiva. Usaremos, a partir daqui, o símbolo $\sqcup$ para indicar a união disjunta. Valem as seguintes propriedades:

1. Se φ é aditiva e $\varphi(\emptyset) < \infty$, então $\varphi(\emptyset) = 0$.

$$\emptyset = \emptyset \sqcup \emptyset \Rightarrow \varphi(\emptyset) = \varphi(\emptyset) + \varphi(\emptyset) \Rightarrow \varphi(\emptyset) = 0$$

2. Se $A \subseteq B$, então $\varphi(A) \leq \varphi(B)$.

$$B = A \sqcup (B - A) \Rightarrow \varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B - A) \geq \varphi(A)$$

3. Se φ é aditiva e $A, B \in \mathcal{R}$ então $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

$$A \cup B = (A - B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B - A) \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \varphi(A - B) + \varphi(A \cap B) + \varphi(B - A)$$

$$A = (A \cap B) \sqcup (A - B) \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A - B) \Rightarrow$$

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A - B) + \varphi(B - A) + \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

4. Se $A \subseteq B$ e $\varphi(A) \neq \infty$ então $\varphi(B - A) = \varphi(B) - \varphi(A)$.

$$\text{Se } B = A \sqcup (B - A) \text{ e daí } \varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B - A) \Rightarrow$$

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(B - A)$$

5. Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{R}(\text{anel})$ e $A_i \cap_{i \neq j} A_j = \emptyset$ então $\varphi(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \varphi(A_3) + \dots + \varphi(A_n)$. (Demonstra-se usando indução).

Teorema 4.2.1. Seja φ σ -aditiva, definida num anel $\mathcal{R}$ de conjuntos e sejam $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ uma família crescente, onde cada $A_i \in \mathcal{R}$. Se $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$, então

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(A_i).$$

Demonstração. Seja $B_i = A_i - A_{i-1}$ para todo $n \geq 2$. Então $A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_n \sqcup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Sendo que $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$, e $B_i \cap A = \emptyset$, como φ é σ -aditiva tem-se que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \varphi(A_1 \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots) \\
&= \varphi(A_1) + \varphi(B_1) + \varphi(B_2) + \varphi(B_3) + \cdots \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(A_1) + \varphi(B_1) + \varphi(B_2) + \varphi(B_3) + \cdots + \varphi(B_N) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(\underbrace{A_1 \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_N}_{A_N}) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(A_N).
\end{aligned}$$

□

Definição 4.2.5. Um intervalo em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto do tipo $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, onde cada I_j é um intervalo limitado em $\mathbb{R}$ (aberto, fechado, semi-aberto ou degenerado).

Definição 4.2.6. Dado um intervalo I em $\mathbb{R}^n$ definimos a função volume $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Definição 4.2.7. Um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito um conjunto elementar se E for a reunião de um número finito de intervalos.

De posse das definições de intervalos e conjuntos elementares, assim como da medida de um intervalo, podemos enunciar as seguintes propriedades. Antes, porém, vamos à seguinte e importante definição.

Definição 4.2.8. O conjunto formado por todos os conjuntos elementares de $\mathbb{R}^n$ será denotado por $\mathcal{E}$.

Propriedade 4.2.2. O conjunto $\mathcal{E}$ é um anel mas não é um σ -anel.

Propriedade 4.2.3. Todo conjunto elementar pode ser escrito como reunião disjunta de intervalos.

Definição 4.2.9. Dado um conjunto elementar $E = \bigsqcup_{j=1}^n I_j$ o volume de E é definido por $m(E) := \sum \text{vol}(I_j)$.

Propriedade 4.2.4. Se $E \in \mathcal{E}$ a expressão $\sum \text{vol}(I_j) := m(E)$ não depende da particular família disjunta de intervalos $\{I_j\}$ cuja reunião é E .

Propriedade 4.2.5. A função $m : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é aditiva.

Definição 4.2.10. Seja E um subconjunto elementar de $\mathbb{R}^n$. Seja $\varphi \geq 0$ uma função finita e aditiva em E . A função φ é dita regular se para todo $A \in \mathcal{E}$ vale:

$$\varphi(A) = \sup\{\varphi(K) : K \in \mathcal{E}, K \subseteq A, K \text{ é compacto}\},$$

$$\varphi(A) = \inf\{\varphi(U) : U \in \mathcal{E}, A \subseteq U, U \text{ é aberto}\}.$$

Exemplo 4.2.4. A função m , da definição 4.2.6 é regular.

Demonstração. Vamos analisar duas situações. Seja, em primeiro lugar, A um intervalo em $\mathbb{R}^n$. Temos que $A \in \mathcal{E}$. Escrevamos $A = \prod\{a_i, b_i\}$, onde $\{ = (\text{ ou } [e] =) \text{ ou }]$. Assim, se algum $a_i = b_i$, temos que $m(A) = 0$. e, portanto, $\sup\{m(K), \dots\} \geq m(\emptyset) = 0, \dots$, sendo K compacto.

Se, por outro lado, $a_i < b_i \forall i = 1, \dots, n$, tomando $K = \prod [a_i + \delta, b_i - \delta]$, onde $2\delta < \min(b_i - a_i)$, tem-se que K é compacto, $K \subseteq A$, $K \in \mathcal{E}$ e $m(K) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 2\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \prod (b_i - a_i) = m(A)$. Segue que $m(A) = \sup\{m(K), \dots\}$.

Agora, para verificar a segunda condição da Definição 4.2.10, tome $U = \prod (a_i + \delta, b_i - \delta)$. Então é claro que $U \in \mathcal{E}$, $A \subseteq U$, e que $m(U) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) \rightarrow \prod (a_i, b_i) = m(A)$.

Para o segundo caso, consideremos A uma reunião disjunta de intervalos, ou seja, $A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_k$. Dado $\epsilon > 0$, escolha para cada $j = 1, 2, 3, \dots, p$, um compacto elementar $K_j \subseteq I_j$, com $m(K_j) > m(I_j) - \frac{\epsilon}{p}$.

Então $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_p$ é compacto e elementar, pois é reunião finita de elementares $m(K) = m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + \dots + m(K_p) > \sum_{j=1}^p m(I_j) - \frac{\epsilon}{p} = \left(\sum_{j=1}^p m(I_j)\right) - \epsilon = m(A) - \epsilon \Rightarrow m(A) = \sup\{m(K), \dots\}$, pois ϵ é arbitrário.

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, tome, para cada $j = 1, 2, 3, \dots, p$, um conjunto aberto elementar $U_j \supseteq I_j$ tal que $m(U_j) < m(I_j) + \frac{\epsilon}{p}$.

Seja $U = \bigcup_{j=1}^p U_j$. Daí, $m(U) = m(\bigcup_{j=1}^p U_j) \leq \sum_{j=1}^p m(U_j) < \sum m(I_j) + \frac{\epsilon}{p} = m(A) + \epsilon$. Ficou provado que $m(A) = \inf\{m(U), \dots\}$ □

Exemplo 4.2.5. Tome uma função crescente $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dado um intervalo I de extremos a, b , sendo $g(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ e $g(a-) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$, definimos $g(b+)$ e $g(b-)$ de forma semelhante. Defina $\varphi(I)$ como sendo:

$$\varphi(I) = \begin{cases} g(b-) - g(a+), & \text{para } I = (a, b) \\ g(b+) - g(a-), & \text{para } I = [a, b] \\ g(b-) - g(a-), & \text{para } I = [a, b) \\ g(b+) - g(a+), & \text{para } I = (a, b] \end{cases}.$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ for um conjunto elementar, ponha $\varphi(A) = \sum \varphi(I_j)$, onde $\{I_j\}$ é uma partição de A por intervalos.

A função φ , assim construída, está bem definida, é uma função finitamente aditiva e regular.

Escrevemos, mais convenientemente,

$$\varphi(a, b) = g(b-) - g(a+).$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que, dada uma função $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, finitamente aditiva e regular, existem um σ -anel $\bar{\mathcal{E}}$ contendo $\mathcal{E}$ e uma função σ -aditiva $\bar{\varphi} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tal que $\bar{\varphi}(A) = \varphi(A)$, $\forall A \in \mathcal{E}$. Para atingir esse objetivo, vamos definir, a seguir, o conceito de medida exterior.

Definição 4.2.11. *Seja $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ finitamente aditiva e regular. Para qualquer subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, defina a medida exterior de E por $\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, onde $\inf$ é tomado sobre todas as famílias elementares $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos elementares abertos tais que $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.*

É importante notar que $\mu^* : P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, ou seja, a função atua sobre o conjuntos de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.2.6. *A medida exterior de volume em $\mathbb{R}^n$, $m^*(E)$, é um exemplo muito importante.*

Propriedade 4.2.6. *As seguintes propriedades são imediatas.*

1. $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$;
2. $\mu^*(E) \geq 0$, possivelmente infinito;
3. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Teorema 4.2.2. *Se $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é finitamente aditiva e regular, então:*

1. $\mu^*(A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{E}$;
2. se $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ (propriedade sub-aditiva).

Demonstração. 1. Seja $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma família de subconjuntos elementares abertos, contendo um conjunto elementar dado A . Seja $\epsilon > 0$. Pela regularidade de μ , tome

$K \subseteq A$, K elementar, K compacto, tal que $\mu(K) > \mu(A) - \epsilon$. Como $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N A_i$. Assim, $\mu(K) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^N A_i) \leq \sum_{i=1}^N \mu(A_i) \Rightarrow \mu(A) < \mu(K) + \epsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, donde $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Dado $\epsilon > 0$, existe um aberto regular $U \supseteq A$ tal que $\mu(U) < \mu(A) + \epsilon$. Seja $A_1 = U$, $A_i \neq \emptyset$, $\forall i \leq 2$. Então $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(U) < \mu(A) + \epsilon$. Se $\mu^*(A) < \mu(A) + \epsilon$, e como ϵ é arbitrário, temos $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

Portanto, vale a igualdade, conforme afirmado.

2. Para esse segundo item do teorema, vamos primeiro considerar o caso em que $\mu^*(E_i) < \infty$, $\forall i$.

Seja $\epsilon > 0$. Para cada i , existe uma família enumerável $\{A_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ de abertos elementares tal que $E_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j^i) < \mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$. Note que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^i$ e, portanto, $\{A_j^i\}_{i,j=1}^{\infty}$ é uma família enumerável de abertos elementares que cobre $\bigcup E_i$. Isso implica que $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(A_j^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$. Como ϵ é arbitrário, $\mu^*(\bigcup E_i) \leq \sum \mu^*(E_i)$. Na demonstração do caso 1, considere $\sum \mu^*(E_i) < \infty$.

Finalmenteme, o caso em que $\sum \mu^*(E_i) = \infty$, para algum i , é óbvio. $\square$

Voltando a considerar a função volume $m : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, já estabelecemos, na Propriedade 4.2.5, que ela é aditiva e, no Exemplo 4.2.4. Agora, lembrando da Definição 4.2.4, enunciaremos o teorema 4.2.3. Mas antes da apresentação e demonstração desse teorema serão necessários estabelecer alguns fatos. Começaremos com algumas observações feitas em preparação para um fato importante, a saber, o de que a medida exterior de um conjunto elementar é invariante por translações. Seja “ $\sim$ ” a relação de equivalência no conjunto $[0, 1]$, definida por $x \sim y$, se $x - y \in \mathbb{Q}$.

Lema 4.2.1. *Seja $X \subseteq [0, 1]$, formado por um único elemento de cada classe de equivalência, então $[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} X + q$, $X + q \subseteq [-1, 2]$.*

Demonstração. Seja $t \in [0, 1]$. Então existe $x \in X$ tal que $t \sim x \Rightarrow t = x + \underbrace{(t - x)}_{\in \mathbb{Q}}$. Como $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1$ isso implica que $-1 \leq t - x \leq 1$. Tomando $q = t - x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, e por $t \sim x \Rightarrow t = x + \underbrace{(t - x)}_{\in \mathbb{Q}}$, temos que $t \in X + q$. Dados $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ e $x \in X$ é óbvio que $x + q \in [-1, 2]$. Isso prova nossa afirmação. $\square$

Lema 4.2.2. *Se $q, q' \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ são disjuntos, então $(X + q) \cap (X + q') = \emptyset$.*

Demonstração. a afirmação não fosse verdadeira, existiriam $x_1, x_2 \in X$ tais que $x_1 + q = x_2 + q' \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow q = q'$, o que é um absurdo. $\square$

Lema 4.2.3. m^* é invariante por translação, isto é, se $E \in P(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $m^*(E + \alpha) = m^*(E)$. Segue daí que $m^*(X) = m^*(X + q)$, $\forall q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

Afirmamos que $m^*(X) \neq 0$. De fato, $1 = m([0, 1]) = m^*([0, 1]) \leq m^*\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} X + q\right) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m^*(X + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m^*(X)$. Portanto, $m^*(X) \neq 0$.

Teorema 4.2.3. m^* não é σ -aditiva em $P(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que m^* seja σ -aditiva. Então $3 = m([-1, 2]) = m^*([-1, 2]) \geq m^*\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} X + q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m^*(X + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m^*(X) = +\infty$, o que é um absurdo. $\square$

Definição 4.2.12. Dados conjuntos $E, F \in P(\mathbb{R}^+)$, definimos:

1. A diferença simétrica S entre E e F , como $S(E, F) = (E - F) \sqcup (F - E)$;
2. A distância entre conjuntos d , como $d(E, F) = \mu^*(S(E, F))$ (μ^* é aditiva e regular em $\mathcal{E}$);
3. Quando $d(E_n, E) \rightarrow 0$, dizemos que E_n converge para E , e escrevemos $E_n \rightarrow E$;
4. Se existe uma sequência $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos elementares com $E_n \rightarrow 0$, dizemos que E é “finitamente μ -mensurável”. A coleção de tais conjuntos será denotada por $\mathcal{M}_F(\mu) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n : E = \lim A_n \rightarrow \mathcal{E}\}$;
5. Um conjunto E será chamado “ μ -mensurável” se E for a reunião enumerável de conjuntos finitamente μ -mensuráveis;
6. Finalmente, $\mathcal{M}(\mu) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n : E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \mid A_i \in \mathcal{M}_F(\mu)\}$ denotará o conjunto de todos os conjuntos μ -mensuráveis.

Observação 4.2.2. Seguem algumas consequências da Definição 4.2.12.

1. Como pode ser visto na definição de $\mathcal{M}(\mu)$, esse é o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são subconjuntos da reunião enumerável de conjuntos finitamente μ -mensuráveis;
2. O anel $\mathcal{E}$, de todos os conjuntos elementares, é um subconjunto do conjunto $\mathcal{M}_F(\mu)$ das funções finitamente μ -mensuráveis;

3. O conjunto das funções finitamente μ -mensuráveis é um subconjunto das funções μ -mensuráveis, isto é, $\mathcal{M}_F(\mu) \subseteq \mathcal{M}(\mu)$;
4. Todo conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, com medida exterior nula, isto é, $\mu^*(E) = 0$, é finitamente μ -mensurável, e $d(\emptyset, E) = 0$;
5. O próprio espaço $\mathbb{R}^n$ é um elemento de $\mathcal{M}(\mu)$, pois pode ser escrito como reunião enumerável de intervalos.

Para a demonstração do Teorema 4.2.4, serão necessárias algumas propriedades da diferença simétrica, bem como da distância entre conjuntos. Enunciaremos e provaremos essas propriedades, após isso, demonstraremos o teorema em questão.

Definição 4.2.13. Um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é dito ser completo se $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X e μ é σ -aditiva.

Uma aplicação imediata do Teorema 4.2.4 e da Definição 4.2.13 nos permite concluir que o espaço de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mu), \mu^*)$ é completo.

A seguir, listamos uma série de propriedades da diferença simétrica, conceito esse introduzido na Definição 4.2.12.

Propriedade 4.2.7. Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$, ou seja, $A, B \in P(\mathbb{R}^n)$ são válidas as seguintes propriedades:

1. $S(A, B) = S(B, A) = S(B^c, A^c)$;
2. $S(A, A) = \emptyset$;
3. $S(A, B) \subseteq S(A, C) \cup S(C, B)$;
4. dados A_1, A_2, B_1, B_2 em $P(\mathbb{R}^n)$, cada um dos conjuntos
 - a) $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$,
 - b) $S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)$,
 - c) $S(A_1 - A_2, B_1 - B_2)$

é subconjunto de $S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$.

Demonstração. 1. Para a primeira igualdade, considere $(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. Para a segunda igualdade, note que $(A^c - B^c) \cup (B^c - A^c) = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$.

2. A segunda propriedade é imediata.

$$3. (A - B) \cup (B - A) \subseteq (A - C) \cup (C - A) \cup (C - B) \cup (B - C)$$

Tomemos $x \in A$, mas $x \notin B$. Se $x \in C$, então $x \in (C - B)$. Se, por outro lado, $x \notin C$, então $x \in (A - C)$. O mesmo raciocínio para $x \in B$ e $x \notin A$

4. Parte a: Note que $(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$. Se $x \in (A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2)$, $x \in A_1$ ou $x \in A_2$, mas $x \notin B_1$ e $x \notin B_2$. Decorre dessa suposição que, se $x \in A_1$, então $x \in (A_1 - B_1)$. Agora, se $x \in A_2$, então $x \in (A_2 - B_2)$. Trocando os papéis de A e B e reunindo-se membro a membro, obtemos a conclusão.

$$\text{Parte b: } S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) = S((A_1 \cap A_2)^c, (B_1 \cap B_2)^c) = S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c) \subseteq S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2).$$

Parte c: Esta demonstração segue do fato de que $A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c$. □

Corolário 4.2.1. *Dados A e B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, são válidas as seguintes propriedades:*

1. $d(A, B) = d(B, A) = d(A^c, B^c)$;
2. $d(A, A) = 0$;
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$;
4. a) $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$;
 b) $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$;
 c) $d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.

Proposição 4.2.1. *Dados $A, B \in P(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B),$$

desde que ao menos um dentre $\mu^(A)$ e $\mu^*(B)$ seja finito.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$. Assim, devido ao Corolário 4.2.1, temos que $d(A, \emptyset) \leq d(A, B) + d(B, \emptyset)$. Logo, $\mu^*(A) \leq d(A, B) + \mu^*(B)$, ou seja, $\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B)$. Considerando a suposição inicial de que $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$, obtemos o resultado $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B)$. □

Observação 4.2.3. *Para todo $E \in \mathcal{M}_F(\mu)$, temos que $\mu^*(E) < \infty$.*

Tome $A \in \mathcal{E}$ tal que $d(A, E) < 1$. Aplicando $\mu^*(A) \leq d(A, B) + \mu^*(B)$, temos $\mu^*(E) \leq d(A, E) + \mu^*(A) < 1 + \mu^*(A) < \infty$.

Decorre, como consequência desse conjunto de observações, que vale o seguintes teorema:

Teorema 4.2.4. $\mathcal{M}(\mu)$ é um σ -anel de conjuntos (também uma σ -álgebra). Além disso, a restrição de μ^* a $\mathcal{M}(\mu)$ é σ -aditiva.

Lema 4.2.4. $\mathcal{M}_F(\mu)$ é um anel.

Demonstração. Claro que $\emptyset \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_F(\mu)$. Dados $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ queremos que $A \cup B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Tome $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ tais que $A_n \rightarrow A$ e $B_n \rightarrow B$. Segue que $\underbrace{A_n \cup B_n}_{\in \mathcal{E}} \rightarrow \underbrace{A \cup B}_{\in \mathcal{M}_F(\mu)}$ e $\underbrace{A_n - B_n}_{\in \mathcal{E}} \rightarrow \underbrace{A - B}_{\in \mathcal{M}_F(\mu)}$. $\square$

Lema 4.2.5. μ^* é aditiva em $\mathcal{M}_F(\mu)$.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Tome $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ formados por conjuntos elementares, com $A_n \rightarrow A$ e $B_n \rightarrow B$. Com essas seqüências convergentes de conjuntos, obtemos $\mu^*(A) + \mu^*(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n \cup B_n) + \mu^*(A_n \cap B_n) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)$. No caso em que $A \cap B = \emptyset$, temos que $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. $\square$

Lema 4.2.6. Se a seqüência $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_F(\mu)$ é formada por conjuntos dois a dois disjuntos, então $\mu^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$. A desigualdade menor que ou igual a decorre da σ -aditividade de μ^* .

Demonstração. Seja A definido por $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, observe que $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_N \subseteq A$. Então $\mu^*(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_N) \leq \mu^*(A)$. Portanto, segue que $\mu^*(A_0) + \mu^*(A_1) + \dots + \mu^*(A_N) \leq \mu^*(A)$. Tomando $\lim_{N \rightarrow \infty}$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A)$. $\square$

Lema 4.2.7. Se $A \in \mathcal{M}(\mu)$ e $\mu^*(A) < \infty$ então $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Demonstração. Seja $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ onde $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Definindo conjuntos A'_1 e A'_n como $A'_1 = A_1$ e $A'_n = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})$ para $n \geq 2$, temos que $A'_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ e $A'_n \cap A'_m = \emptyset$ para, $n \leq m$.

Tome $B_N = A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_N$. Segue que $d(B_N, A) = \mu^*(S(B_N, A)) = \mu^*(A - B_N) = \mu^*(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A'_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(A'_n) \rightarrow 0$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A'_n) = \mu^*(A) < \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $C_n \in \mathcal{E}$ tal que $d(C_n, B_n) < \frac{1}{n}$. Daí, $d(C_n, A) \leq d(C_n, B_n) + d(B_n, A) < \frac{1}{n} + d(B_n, A) \rightarrow 0$, ou seja, $C_n \rightarrow A$. Logo, $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. $\square$

Lema 4.2.8. $\mathcal{M}(\mu)$ é um σ -anel.

Demonstração. Tome $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$. Cada A_i é uma reunião enumerável de conjuntos finitamente μ -mensuráveis. Portanto, para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ é uma reunião

enumerável de reuniões enumeráveis de conjuntos finitamente μ -mensuráveis e, portanto, $\bigcup A_i \in \mathcal{M}(\mu)$.

Seja $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$. Escreva $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, onde cada $A_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Então $A - B = A \cap B^c = (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \cap B^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B^c)$. Basta provar que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap B^c = A_i - (A_i \cap B)$. Se conseguirmos provar que $A_i \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$, teremos que $A_i \cap B^c \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Para tanto, escreva $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$, onde cada $B_j \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Decorre que $A_i \cap B = A_i \cap (\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_i \cap B_j)$. Daí, $A_i \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$ e $\mu^*(A_i \cap B) \leq \mu^*(A_i) < \infty$. Logo, $A_i \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$, o que implica, $A_i \cap B^c \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Portanto, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B^c) = A - B \in \mathcal{M}(\mu)$.

Para completar a demonstração do teorema, resta provar que μ^* é σ -aditiva em $\mathcal{M}(\mu)$. Para isso, tome $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ dois a dois disjuntos. O objetivo aqui é provar que $\mu^*(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

Se ocorrer $\mu^*(\bigcup A_i) = \infty$, a desigualdade maior que ou igual a é óbvia. Por outro lado, se $\mu^*(\bigcup A_i) < \infty$, então $\mu^*(A_i) < \infty$, para todo $i \in \mathbb{N}$ e, portanto, $A_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$, donde segue a conclusão.

Alternativa: escreva cada A_n como $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$ e $A_{n,i} \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Então:

$$\mu^*(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \mu^*(\bigcup_{n, i \in \mathbb{N}} A_{n,i}) = \sum_n \sum_i \mu^*(A_{n,i}) = \sum_n \mu^*(A_n). \quad \square$$

Chegamos ao ponto alto dessa seção, como mencionado na introdução, que é a definição da Medida de Lebesgue.

Definição 4.2.14. *A medida de Lebesgue é a tripla $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(m), m^*_{\mathcal{M}(m)})$.*

Na sequência, é apresentada uma série de observações importantes sobre conjuntos mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. Também, algumas consequências da teoria construída até aqui, para conjuntos quaisquer.

Observação 4.2.4. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Todo subconjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é μ -mensurável, $\forall \mu$;*

Justificativa: *De fato, a coleção dos cubos abertos com aresta racional e centro num ponto de $\mathbb{Q}^n$ é uma base enumerável para os abertos de $\mathbb{R}^n$. Todo aberto U é a reunião de uma subcoleção de tais cubos, onde $U \in \mathcal{M}(\mu)$.*

2. *Todo fechado F é μ -mensurável ($F \subseteq \mathbb{R}^n$);*

Justificativa: Todo conjunto fechado F é o complementar de um conjunto aberto U , que, por sua vez, pode ser escrito como reunião enumerável de abertos. Assim, tanto $\mathbb{R}^n$ quanto U são μ -mensuráveis. Logo, $F = \mathbb{R}^n - U \in \mathcal{M}(\mu)$.

3. Todo Boreliano é μ -mensurável;

Justificativa: Como todo aberto $U \in \mathcal{M}(\mu)$ e como $\mathcal{M}(\mu)$ é uma σ -álgebra, isso implica que $\mathcal{M}(\mu)$ contém a σ -álgebra dos boleanos.

4. Se $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \ni \vec{0} \\ 0 & \text{se } A \not\ni \vec{0} \end{cases},$$

então μ é aditiva e regular.

Justificativa: Temos que $\mathcal{M}(\mu) = P(\mathbb{R}^n)$.

5. A restrição da medida exterior aos conjuntos μ -mensuráveis, $\mu^*|_{\mathcal{M}(\mu)}$, é regular, no seguinte sentido:

Dado $E \in \mathcal{M}(\mu)$, temos que

$$\mu^*(E) = \begin{cases} \inf\{\mu^*(U) : U, \text{ aberto}, U \supseteq E\} & \text{(I)} \\ \sup\{\mu^*(K) : K, \text{ compacto}, U \subseteq E\} & \text{(II)}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Justificativa para (I): Dado $\epsilon > 0$, existe uma cobertura $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ formada por conjuntos elementares abertos tais que $\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i) \geq \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i)$.

Justificativa para (II): Essa demonstração será feita em duas etapas. Na primeira etapa, E será considerado um conjunto limitado e, na segunda, E será um conjunto ilimitado.

II.a: Considere que E é limitado. Seja A um intervalo fechado (em $\mathbb{R}^n$) contendo E . Dado $\epsilon > 0$, tome um aberto $U \supseteq A - E$ com $\mu^*(U) \leq \mu(A - E) + \epsilon$.

Tome $K = U^c \cap A$. Tal K está contido em E , que é fechado e limitado e, portanto, compacto. De fato, tomando $x \in K$, temos que $x \in A - U$, ou $x \in E$, ou ainda, $x \in A - E$. Se $x \in A - E \subseteq U$ então $x \in U$, e isso é absurdo. Logo, $x \in E$.

Agora, observe que

$$\begin{cases} A - E \subseteq U \\ A - E \subseteq A \end{cases} \implies A - E \subseteq U \cap A.$$

Além disso, $A - E \subseteq U \cap A$ e $U \cap A \subseteq U$. Segue que $\mu^*(A - E) \leq \mu^*(\underbrace{U \cap A}_{=U'}) \leq \mu^*(U) \leq \mu^*(A - E) + \epsilon$.

Também, $\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A - E) = \mu^*(U') + \mu^*(\underbrace{A - U'}_{=K})$. Como $A - U' = K$, segue que $\mu^*(K) = \mu^*(A) - \mu^*(U') = \mu^*(E) + \mu^*(A - E) - \mu^*(U') \geq \mu^*(E) - \epsilon$. Portanto, fica provado que $\sup\{\mu^*(K), K \text{ compacto}, K \subseteq E\} = \mu^*(E)$.

II.b: Se E é ilimitado, temos que $\mu^*(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(E \cap B(0, n))$, sendo $B(0, n)$ a bola aberta centrada em zero, de raio n conveniente. Para continuar, precisamos de um lema auxiliar.

Lema 4.2.9. Sejam X um conjunto, $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ um σ -anel e $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ σ -aditiva. Dada uma sequência crescente $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$ de conjuntos mensuráveis ($E_i \in M$), então $\mu(\cup E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$.

Demonstração. Temos que $\mu(\cup E_i) = \mu(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots \cup E_n \dots) = \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i - E_{i-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_1) + \sum_{i=2}^N \mu(E_i - E_{i-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N)$. $\square$

Retomando à prova da regularidade, lembremos que $\mu^*(E) = \lim \mu^*(E \cap B(O, n))$.

Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $\mu^*(E \cap B(O, n)) \geq \mu^*(E) - \frac{\epsilon}{2}$. Por ser limitado, existe um compacto $K \subset (E \cap B(O, n))$ tal que $\mu^*(K) \geq \mu^*(E \cap B(O, n)) - \frac{\epsilon}{2} \geq \mu^*(E) - \epsilon$. Segue, portanto, a conclusão que $\mu^*(E) = \sup \mu^*(K)$, em que $K \subseteq E$ e K compacto.

6. Dado $E \subseteq \mathcal{M}(\mu)$, existem um F_σ (conjunto), denotado por F ; um G_δ , denotado por G , tais que $F \subseteq E \subseteq G$ e $\mu^*(F) = \mu^*(E) = \mu^*(G)$, se e somente se $\mu^*(E - F) = \mu^*(G - E)$;

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, tome $\underbrace{K_n}_{\text{compacto}} \subseteq E \subseteq \underbrace{U_n}_{\text{aberto}}$ com $\mu^*(K_n) > \mu^*(E) - \frac{1}{n}$ e $\mu^*(U_n) > \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Seja $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ e $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Então $\mu^*(K_n) \leq \mu^*(F) \leq \mu^*(E)$ e $\mu^*(U_n) \geq \mu^*(G) \geq \mu^*(E)$. Logo

$$\mu^*(F) = \mu^*(E) = \mu^*(G) \quad \square$$

7. Todo conjunto μ -mensurável E se escreve como $E = F \cup Z$, onde $F = F_\delta$ e Z é tal que $\mu(Z) = 0$;

Demonstração. Seja F como no item 6 e $Z = E - F$. $\square$

8. $\mathcal{M}(\mu)$ sempre contém $B(\mathbb{R}^n)$ e algo mais, sendo que este algo depende de μ ;

9. Todo conjunto enumerável tem medida de Lebesgue zero, pois todo ponto tem medida nula.

Existem também conjuntos não enumeráveis com medida nula, por exemplo, o conjunto de Cantor.

4.3 Teoria geral da medida

O objetivo dessa seção é estabelecer alguns resultados gerais para espaços de medida e caracterizar algumas propriedades como a mensurabilidade de somas e produtos de funções mensuráveis. Além disso, vamos introduzir o conceito de função simples. Esse é um conceito central, pois toda integrabilidade de funções no sentido de Lebesgue é construída tendo como ponto de partida a integrabilidade das funções simples.

Definição 4.3.1. Um espaço de medida é uma tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$, onde $\mathcal{M}$ é um σ -anel de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ é uma função σ -aditiva.

Quando $X \in \mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra, dizemos que X é um espaço mensurável.

Nesta seção, estudaremos os espaços mensuráveis. São exemplos de espaços de medidas a medida de Lebesgue e a Teoria da Probabilidade ($P(X) = 1$).

Definição 4.3.2. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é dita mensurável se, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) > a\}$ é mensurável ($\in \mathcal{M}$).

Proposição 4.3.1. São equivalentes as afirmativas de 1 até 4 e implicam em 5. Caso $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$, então 5 implica 1 até 4.

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) > a\}$ é mensurável;
2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) < a\}$ é mensurável;
3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \geq a\}$ é mensurável;
4. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \leq a\}$ é mensurável;
5. Para todo boreliano, se $E \subseteq \mathbb{R}$, então $f^{-1}(E)$ é mensurável.

Demonstração. • (1) $\Leftrightarrow$ (4), pois $\{x : f(x) \leq a\} = X - \{x : f(x) > a\}$.

• (2) $\Leftrightarrow$ (3), pois $\{x : f(x) \geq a\} = X - \{x : f(x) < a\}$.

• (1) $\Leftrightarrow$ (3), pois $\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : f(x) > a + \frac{1}{n}\}$.

- $(1 - 4) \Rightarrow (5)$. É fato que, para todo intervalo aberto $I = (a, b)$, é mensurável o conjunto $f^{-1}(I) = \{x : f(x) > a\} \cap \{f(x) < b\}$. Dado $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto, sabemos que, se $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, onde cada I_n é um intervalo aberto, $f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_n)$ é mensurável. Esse fato é consequência de I_n , um conjunto enumerável de intervalos abertos, ser base enumerável para o aberto U . Considere a família $\mathcal{G} = \{S \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(S) \text{ mensurável}\}$. É fácil ver que $\mathcal{G}$ é uma σ -álgebra que contém todos os abertos. Isso implica que $\mathcal{G} \supseteq B$ (Borelianos). Logo, dado um boreliano $E \subseteq \mathbb{R}$, tem-se que $E \in \mathcal{G}$, ou seja, $f^{-1}(E)$ é mensurável.
- $(5) \Rightarrow (1)$ $\{x : f(x) > a\} = f(a, +\infty)$ é mensurável por 5. □

Proposição 4.3.2. *Se f é mensurável, então também são mensuráveis f_+ , f_- e $|f|$.*

Demonstração. Seja o conjunto $\{x : f_+(x) > a\}$.

- i) Para $a > 0$, temos $\{x : f_+(x) \geq a\} = \{x : f(x) \geq a\}$, que é mensurável.
- ii) Para $a \leq 0$, temos $\{x : f_+(x) \geq a\} = X$, que é mensurável. Isso implica que f_+ é mensurável.

Temos que f_- é mensurável por razões similares.

Quanto a $|f|$, temos: $\{x : |f(x)| < a\} = \{x : f(x) < a\} \cap \{x : f(x) > -a\}$, que é mensurável. □

Proposição 4.3.3. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então são mensuráveis as seguintes funções:*

- a) $\sup f_n$;
- b) $\inf f_n$;
- c) $\limsup f_n$;
- d) $\liminf f_n$;

Demonstração. a) Observe que $\{x : \sup f_n > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x) > a\}$ é uma reunião enumerável de enumeráveis e, portanto, é enumerável, o que implica que $\sup f_n$ é uma função mensurável.

b) Para $\inf f_n$, a demonstração é semelhante.

c) Temos que $\limsup f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\sup_{k \geq n} f_k(x)\}$. Como $F_n = \sup_{k \geq n} f_k(x)$ é mensurável, pelo item a, e $\inf F_n(x)$ é mensurável, pelo item b, segue que $\limsup f_n$ é mensurável.

d) A demonstração é semelhante à do item c. $\square$

Corolário 4.3.1. *Nas hipóteses da Proposição 4.3.3, caso exista $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, para todo x , então a função $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ é mensurável.*

Demonstração. Como $\lim f_n(x) = \limsup f_n(x)$ e $\limsup f_n(x)$ são mensuráveis, então $\lim f_n(x)$ é mensurável. $\square$

Teorema 4.3.1. *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, com f e g mensuráveis, e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então a função $h(x) = F(f(x), g(x))$ é mensurável.*

Demonstração. Primeiramente, note que temos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

Dado $a \in \mathbb{R}$, considere $\{x : h(x) > a\}$. Seja $U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : F(s, t) > a\}$, e note que U é aberto. Além disso, $\{x : h(x) > a\} = \{x : (f(x), g(x)) \in U\}$.

Escreva $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \times J_n$, onde I_n e J_n são intervalos abertos de $\mathbb{R}$.

Daí

$$\begin{aligned} \{x : (f(x), g(x)) \in U\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x : (f(x), g(x)) \in I_n \times J_n\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x : f(x) \in I_n\} \cap \{x : g(x) \in J_n\} \end{aligned}$$

é mensurável. $\square$

Corolário 4.3.2. *Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis, então $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis.*

Observação 4.3.1. *Existem exemplos de funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que g é contínua e f é mensurável, mas a função composta $f \circ g$ não é mensurável.*

Proposição 4.3.4. *Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ são mensuráveis, então $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são mensuráveis.*

Proposição 4.3.5. *Se $X = \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável.*

4.4 Funções simples

Definição 4.4.1. *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função simples se $f(X)$ é um conjunto finito, digamos $f(X) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$.*

Considere $E_i = f^{-1}(\{c_i\})$, então $\{E_i\}$ forma uma partição finita de X e, além disso, f pode ser assim definida:

$$f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}.$$

Proposição 4.4.1. *Toda função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limite pontual de uma sequência $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Se f é mensurável, as S_n podem ser tomadas mensuráveis.*

Se $f \geq 0$, as S_n podem ser tomadas maiores que ou iguais a zero.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, sejam $t_i = \frac{i}{n}$, para $i = -n^2, \dots, n^2$. Defina $E_i = \{x : t_{i-1} \leq f(x) < t_i\}$, para $i = -n^2 + 1, \dots, n^2$. Seja também $F_+ = \{x : f(x) \geq n\}$ e $F_- = \{x : f(x) < -n\}$. Então a coleção $\{E_i\} \cup \{F_+, F_-\}$ forma uma partição de X . Seja

$$S_n = \sum_{i=-n^2+1}^{n^2} t_i 1_{E_i} + n 1_{F_+} - n 1_{F_-}. \quad \square$$

Lema 4.4.1. $S_n \rightarrow f$ converge pontualmente.

Demonstração. Dado $x \in X$ e $\epsilon > 0$, seja n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ e $|f(x)| < n_0$. Para $n > n_0$, temos que $|f(x)| < n_0 < n$, donde $x \notin F_+$ e $x \notin F_-$. Segue-se que $x \in E_i$, para algum i , isto é, $t_{i-1} \leq f(x) \leq t_i$, enquanto que $s_n = t_i$, donde $|s_n(x) - f(x)| \leq t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$. $\square$

Observação 4.4.1. *Se $f(x) = +\infty$, então $s_n(x) = n, \forall n$, e $s_n(x) \Rightarrow f(x)$. Idem para o caso $f(x) = -\infty$.*

Caso f seja mensurável, observe que todos os E_i acima, assim como F_+ e F_- , são conjuntos mensuráveis, donde s_n é mensurável, $\forall n$.

Observação 4.4.2. *A função característica de um conjunto mensurável é uma função mensurável.*

Caso $f \geq 0$ e $i \leq 0$, tem-se que $t_i = \frac{i}{n} \leq 0$. Não existe x tal que $f(x) < t_i$.

Isso implica que $E = \emptyset$. Da mesma forma, $F_- = \emptyset$. Portanto: $s_n = \sum_{i=1}^{n^2} t_i 1_{E_i} + n 1_{F_+} \geq 0$.

Observação 4.4.3. *Se a função do Lema 4.4.1 limitada então $s_n \rightarrow f$ uniformemente.*

Observação 4.4.4. *No caso em que $f \geq 0$ no Lema 4.4.1, podemos tomar a sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $0 \leq s_n \leq s_{n+1}$.*

Para justificar a última observação, dado $n \in \mathbb{N}$ considere $t_i = \frac{i}{2^n}$, para $i = 0, \dots, n2^n$, e seja $E_i^n = \{x : t_{i-1}^n \leq f(x) \leq t_i^n; i \geq 1\}$ e $F_+^n = \{x : f(x) \geq n\}$.

Defina $s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} t_{i-1}^n 1_{E_i^n} + 1_{F_+^n}$.

Como antes, prova-se que $s_n \rightarrow f$. Dado $x \in X$, queremos que $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$. Digamos que $x \in E_n^i$, $S_n(x) = t_{i-1}^n$, e

$$S_{n+1} = \begin{cases} t_{j-2}^{n+1} \\ t_{j-1}^{n+1} \end{cases} \geq t_{i-1}^n = S_n(x).$$

Digamos que $x \in F_+^n$. Uma análise similar prova que $S_n(x) \leq S_{n+1}$, caso $x \in F_+^n$.

4.5 Integração

Nesta seção, vamos concluir a construção da teoria de integração de Lebesgue. Nela, são apresentados os resultados mais fortes da teoria, a saber, o Teorema da Convergência Monótona, o Teorema da Convergência Dominada, O Lema de Fatou e a comparação com a Integral de Riemann.

Para todas as considerações feitas nesta seção, estará fixado o espaço de medida (X, M, μ) .

Definição 4.5.1. *Seja s uma função simples, mensurável. Escreva $s = \sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}$, onde cada E_i é mensurável. (Como já visto anteriormente, $s(X) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $E_i = s^{-1}(\{c_i\})$.)*

Definimos $I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i \cap E)$, para qualquer $E \subseteq X$ mensurável.

Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e positiva, definimos

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sup\{I_E(s)\},$$

em que s é uma função simples, mensurável, com $0 \leq s \leq f$.

Note que $\int_E f(x) d\mu(x) \in [0, +\infty]$.

Definição 4.5.2. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, definimos*

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \underbrace{\int_E f_+(x) d\mu(x)}_I - \underbrace{\int_E f_-(x) d\mu(x)}_{II},$$

desde que, pelo menos um dentre I ou II seja finito.

No caso em que ambos são finitos, dizemos que f é integrável em E . O conjunto de tais funções será denotado por $\mathcal{L}(\mu, E)$.

4.6 Propriedades da integral

1. Se f é mensurável, limitada e $\mu(E) < \infty$, então $f \in \mathcal{L}(\mu, E)$.

Demonstração. Primeiro, abordaremos o caso $f \leq 0$. Para tanto, seja $0 \leq s \leq f$, onde s é simples e mensurável. Escreva $s = \sum c_i 1_{E_i}$, onde $Im(s) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ e $E_i = s^{-1}(c_i)$. Com essas considerações, temos que $I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i)$.

Seja $M > 0$ tal que $f(x) \leq M \forall x$. Então $c_i \leq M, \forall i$. Isso nos permite concluir que $I_E(s) \leq M \sum_{i=1}^n \mu(E \cap E_i) = M \mu(\sum_{i=1}^n E \cap E_i) = M \mu(E \cap \bigcup_{i=1}^n E_i) = M \mu(E)$. Daí, $\int_E f(x) d\mu(x) \leq M \mu(E) < \infty$.

No caso geral, concluímos que, se f é limitada, então f_+ e f_- são limitadas. Logo, $\int_E f(x) d\mu(x) < \infty$, que implica em f ser integrável. $\square$

Exemplo 4.6.1. Considere a função de Dirichlet definida como

$$D = 1 \cdot 1_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} + 0 \cdot 1_{(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1]}.$$

Fica evidente, com base na definição de integral de Lebesgue, que $I_{E=[0, 1]}(D) = 0$.

2. Se, $\forall x \in X, a \leq f(x) \leq b$, onde a e b são constantes, f mensurável e, além disso, $\mu(E) < \infty$, então $a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E)$.

Demonstração. Primeiro, avaliemos o caso $a \geq 0$.

Note que $0 \leq a \leq f$, tem-se que $I_E(a) \leq \int_E f d\mu$. Escrevendo $a = a 1_X$, obtemos $I_E(a) = a\mu(X \cap E) = a\mu(E)$ e, por conseguinte, $a\mu(E) \leq \int_E f d\mu$.

Na demonstração do item (1), provamos que, se $0 < f < M$, então $\int_E f d\mu \leq M\mu(E)$. Assim, tomando $M = b$, fica provada a afirmação.

Agora, avaliemos o caso geral em que $a \leq f \leq b$, ou seja, $0 \leq f - a \leq b - a$. Pelo caso $a \neq 0$ temos $0 \leq \int_E (f - a) d\mu \leq (b - a)\mu(E)$.

Para concluirmos o caso geral, basta observar que $\int_E f - a d\mu = \int_E f - a\mu(E)$. Essa última igualdade seguirá de um resultado futuro sobre $\int f + g$. $\square$

3. Se $0 \leq f \leq g$, onde f e g são mensuráveis, então

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$$

Demonstração. Dada uma função simples, mensurável s , com $0 \leq s \leq f$, queremos que $I_E(s) \leq \int_E g d\mu$, que segue do fato que $0 \leq s \leq g$. $\square$

4. Se $f \geq 0$ é mensurável e $c \geq 0$, então

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

Demonstração. Para s simples e mensurável, temos $cI_E(s) = I_E(cs)$. Supondo $c > 0$, temos que

$$\begin{aligned} c \int_E f d\mu &= c \sup\{I_E(s) : 0 \leq s \leq f, s \text{ simples e mensurável}\} \\ &= \sup\{cI_E(s) : 0 \leq s \leq f\} \\ &= \sup\{I_E(cs) : 0 \leq cs \leq cf\} \\ &= \sup\{I_E(t) : 0 \leq t \leq cf; t = cs\} \\ &= \int_E cf d\mu \end{aligned}.$$

Caso $c = 0$, é óbvia a demonstração. $\square$

5. Se $\mu(E) = 0$, então $\int_E f d\mu = 0$, para qualquer função mensurável f .

Demonstração. Podemos supor que $f \geq 0$. Seja s simples e mensurável, com $0 \leq s \leq f$. Seja $s = \sum c_i 1_{E_i}$, e temos $I_E(s) = \sum c_i \mu(E \cap E_i) = 0$. Portanto, $\int_E f d\mu = 0$. $\square$

6. Se $E \subseteq F \subseteq X$, onde E e F são mensuráveis, então $\mathcal{L}(\mu, F) \subseteq \mathcal{L}(\mu, E)$.

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}(\mu, F)$, então $\int_F f_+ d\mu < \infty$ e $\int_F f_- d\mu < \infty$.

Seja $g = f_+$ ou f_- . Então $\int_F g d\mu < \infty$. Queremos provar que $\int_E g d\mu < \int_F g d\mu < \infty$.

Seja s uma função simples mensurável, com $0 \leq s \leq g$. Escreva $s = \sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}$ e,

assim, $I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(F \cap E_i) = I_F(s) \leq \int_F g d\mu$.

Portanto, $\int_E g d\mu \leq \int_F g d\mu < \infty$, ou seja, $\int_E f_+ d\mu < \infty$ e $\int_E f_- d\mu < \infty$. Fica provado, assim, que, nas hipóteses enunciadas, $f \in \mathcal{L}(\mu, E)$. $\square$

Teorema 4.6.1. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e $f \geq 0$. Para cada $E \subseteq X$ mensurável, seja $\phi(E) = \int_E f d\mu$. Então ϕ é σ -aditiva. O mesmo se aplica se $f \in \mathcal{L}(\mu, X)$, onde f não é necessariamente positiva.*

Observação: se f é uma função simples mensurável e $s \geq 0$, então $I_E(s) = \int_E s d\mu$.

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema 4.6.1 vamos provar o seguinte resultado auxiliar:

Se $0 \leq t \leq s$, onde t é uma função simples e mensurável, então

$$I_E(t) \stackrel{*}{\leq} I_E(s) \Rightarrow \int_E s d\mu \leq I_E(s).$$

Para a demonstração desse resultado auxiliar, começamos considerando que, como podemos tomar $t = s$, temos que $I_E(s) = \int_E s d\mu$.

Para justificar $*$, lembremos que

$$s = \sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i} \quad \text{e} \quad t = \sum_{j=1}^n d_j 1_{F_j},$$

onde $\{E_i\}$ e $\{F_j\}$ formam partições de X .

Considere a partição $\{G_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,m}^{i=1,2,\dots,n}$, em que $G_{i,j} = E_i \cap F_j$. Temos que

$$\begin{aligned} I_E(t) &= \sum_{j=1}^m d_j \mu(F_j \cap E) \\ &= \sum_{j=1}^m d_j \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n (F_j \cap E_i) \cap E\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(F_j \cap E_i \cap E) (**). \end{aligned}$$

Note que, quando $F_j \cap E_i \neq \emptyset$, existe $x \in F_j \cap E_i$, donde $d_j = t(x) \leq s(x) = c_i$.

Assim,

$$\begin{aligned} (**) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j \mu(F_j \cap E_i \cap E) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \mu(F_j \cap E_i \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m F_j \cap E_i \cap E\right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i \cap E) = I_E(s). \end{aligned}$$

Demonstração. Teorema 4.6.1) A demonstração será dividida em dois casos.

Caso (a) Se $f \geq 0$, então a função $\phi : m \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, dada por $\phi(E) = \int_E f d\mu$, é σ -aditiva.

Vamos demonstrar esse caso considerando separadamente o caso da função característica, das funções simples e, por fim, uma função positiva qualquer.

- (Função característica) Tome $f = 1_A$, onde $A \in \mathcal{M}$, e $\phi(E) = \int_E 1_A d\mu = I_E(1_A) = \mu(A \cap E)$.

Daí, resulta em uma família $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos, e $\phi(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \mu(A \cap \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap E_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(E_n)$.

- (Função simples) Se f é simples, segue do caso acima sem dificuldades, pela própria definição de função simples.

- (Função positiva qualquer) Seja $0 \leq s \leq f$, onde s é simples e mensurável. Então, dada uma família $\{E_n\}$ de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos, tem-se que $I_{\sqcup E_n} = \int_{\sqcup E_n} s \, d\mu = \sum_n \int_{E_n} s \, d\mu \leq \sum_n \int_{E_n} f \, d\mu$, pois $0 \leq s \leq f$, em cada E_n . Daí, $\int_{\sqcup E_n} s \, d\mu \leq \sum_n \int_{E_n} f \, d\mu$, ou seja, $\phi(\sqcup E_n) \leq \sum \phi(E_n)$.

Vamos mostrar agora que, para $E, F \in \mathcal{M}$, com $E \cap F = \emptyset$, temos $\phi(E \cup F) \geq \phi(E) + \phi(F)$.

Dado $\epsilon > 0$, tome s, t funções simples mensuráveis, com $0 \leq s, t \leq f$, tais que $I_E(s) > \int_E f \, d\mu - \epsilon$ e $I_F(t) > \int_F f \, d\mu - \epsilon$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $s = t$ (troca s e t por $\max\{s, t\}$). Então

$$\begin{aligned} \phi(E \cup F) &= \int_{E \cup F} f \, d\mu \\ &\geq I_{E \cup F}(s) \\ &= I_E(s) + I_F(s) \\ &\geq \phi(E) + \phi(F) - 2\epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi(E \cup F) \geq \phi(E) + \phi(F).$$

Portanto, voltando a considerar $\{E_n\}$, temos, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \phi(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) &= \phi(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_N \cup (\cup_{n > N} E_n)) \\ &\geq \phi(E_1) + \phi(E_2) + \cdots + \phi(E_N) + \phi(\cup_{n > N} E_n) \\ &\geq \phi(E_1) + \phi(E_2) + \cdots + \phi(E_N). \end{aligned}$$

Tomando $N \rightarrow \infty$, temos que $\phi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(E_n)$. Portanto, ϕ é σ -aditiva.

Caso (b) Se $f \in \mathcal{L}(\mu, X)$, a função $\phi : m \rightarrow \mathbb{R}$ dada como acima é σ -aditiva.

Para demonstrar esse caso, observemos que, para todo conjunto E mensurável, $E \subseteq X$, temos $f \in \mathcal{L}(\mu, X)$, donde $\phi(E) = \int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$.

Sejam f_+ e f_- as partes positivas e negativas de f , respectivamente.

Dada uma família de conjuntos $\{E_n\}$ mensuráveis dois a dois disjuntos, temos que

$$\begin{aligned}
 \phi(\sqcup E_n) &= \int_{\sqcup E_n} f \, d\mu \\
 &= \int_{\sqcup E_n} f_+ \, d\mu - \int_{\sqcup E_n} f_- \, d\mu \\
 &= \sum_n \int_{E_n} f_+ \, d\mu - \sum_n \int_{E_n} f_- \, d\mu \\
 &= \sum_n \left(\int_{E_n} f_+ \, d\mu - \int_{E_n} f_- \, d\mu \right) \\
 &= \sum_n \int_{E_n} f \, d\mu \\
 &= \sum_n \phi(E_n).
 \end{aligned}$$

Essa última série é absolutamente convergente. $\square$

Corolário 4.6.1. *Se A e B são conjuntos mensuráveis, $A \subseteq B$, $\mu(B - A) = 0$, f mensurável e $f \geq 0$ ou $f \in \mathcal{L}(\mu, X)$, então $\int_A f \, d\mu = \int_B f \, d\mu$.*

Demonstração. $\int_B f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{B-A} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + 0 = \int_A f \, d\mu$ $\square$

Proposição 4.6.1. *Se f, g são mensuráveis, $E \in M$ e $f = g$ em E , então*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

Demonstração. Caso $f, g \geq 0$. Seja $0 \leq s \leq f$, onde s é simples e mensurável. Tome $t = s1_E$, e note que $0 \leq t \leq g$ e, portanto, $I_E(t) \leq \int_E g$, mas é possível provar que $I_E(s) = I_E(t)$. Como s é arbitrário, $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$, e a outra desigualdade segue por simetria.

No caso geral, basta observar, da definição de integral, que $\int_E f = \int_E f_+ - \int_E f_- = \int_E g_+ - \int_E g_- = \int_E g$. $\square$

Definição 4.6.1. *Dada uma propriedade $p(x)$ para $x \in X$, dizemos que $p(x)$ se verifica quase sempre em X , denotamos por q.s., quando essa propriedade vale em todo X , exceto em um subconjunto de X com medida nula.*

Por exemplo, se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f = g$ quase sempre em E , escrevemos $f = g$, q.s.

Corolário 4.6.2. *Se f e g são mensuráveis e positivas e $f = g$ q.s. em E , então*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

Demonstração. Se $A = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$, de forma que $\mu(E - A) = 0$, então

$$\int_E f \, d\mu = \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu = \int_E g \, d\mu. \quad \square$$

Teorema 4.6.2. Se $f \in \mathcal{L}(\mu, E)$, então $\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu$.

Demonstração. Sejam $A = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ e $B = \{x \in E \mid f(x) < 0\}$. Segue que

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \int_{A \sqcup B} f \, d\mu \\ &\stackrel{*}{=} \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu \quad (* \text{ devido à aditividade da } \phi) \\ &= \int_A f_+ \, d\mu - \int_B f_- \, d\mu. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_E |f| \, d\mu &= \int_A |f| \, d\mu + \int_B |f| \, d\mu \\ &= \int_A f_+ \, d\mu + \int_B f_- \, d\mu. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \left| \int_A f_+ - \int_B f_- \right| \\ &\leq \int_A f_+ - \int_B f_- \\ &= \int_E |f|. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.6.3. Se f é uma função mensurável, $|f| \leq g$ e $g \in \mathcal{L}(\mu, E)$, então $f \in \mathcal{L}(\mu, E)$.

Demonstração. Por hipótese, temos que $f_{\pm} \leq |f| \leq g$. Segue das propriedades da integral que $\int_E f_{\pm} \leq \int_E g < \infty$. $\square$

Para o próximo teorema, um dos mais importantes da teoria, vamos considerar um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Esse teorema será essencial para a demonstração das propriedades operacionais, como integral da soma de duas funções ser igual à soma das integrais das mesmas funções.

Teorema 4.6.4. (Teorema da Convergência Monótona) Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n$. Suponha que a sequência seja convergente, isto é, que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) := f(x)$ para todo $x \in X$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x) \longrightarrow \int_E f(x) \, d\mu(x),$$

para todo $E \in \mathcal{M}$

Demonstração. Sabemos que $\left\{ \int_E f_n(x) d\mu(x) \right\}$ é crescente e, portanto, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Vamos provar que $\int_E f d\mu = \alpha$.

Em primeiro lugar, note que $f_n(x) \leq f(x)$, $\forall x$. Logo, pelas propriedades da integral, tem-se que $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ e, portanto, $\alpha \leq \int_E f d\mu$.

Seja s uma função simples, mensurável, com $0 \leq s \leq f$ e considere o conjunto $E_n = \{x \in E : f_n(x) \geq cs(x)\}$, onde $0 < c < 1$.

É claro que E_n é mensurável e que $E_n \subseteq E_{n+1}$, pois $f_n \leq f_{n+1}$.

Além disso, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$, pois, dado $x \in E$, $f(x) > 0 \Rightarrow f_n(x) > 0 = cs(x)$ e, portanto, $x \in E_n$, $\forall n$.

Por outro lado, se $f > 0$, então $cs(x) < f(x)$ e existe n_0 tal que $f_{n_0}(x) > cs(x)$. Assim, $x \in E_{n_0}$.

Para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned} \int_E f_n d\mu &\geq \int_{E_n} f_n d\mu \\ &\stackrel{*}{\geq} \int_{E_n} cs d\mu \\ &= c \int_{E_n} s d\mu. \end{aligned}$$

Para justificar a passagem (*), consideremos $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in E$. Como já provado no texto, temos que $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$, pois

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_E f 1_E d\mu \\ &\leq \int_E g 1_E d\mu \\ &= \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

É claro que $\int_E f_n d\mu \rightarrow \alpha$. Por outro lado, $\int_{E_n} s d\mu = \phi(E_n)$, na notação do Teorema 4.6.1, que afirma também que ϕ é σ -aditiva.

Assim como toda função σ -aditiva, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(E_n) \rightarrow \phi(E)$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} s d\mu \rightarrow \int_E s d\mu.$$

Em conclusão, $\alpha \geq c \int_E s d\mu$. Tomando $\lim_{c \rightarrow 1^-}$, temos $\alpha \geq \int_E s d\mu$. Como s é arbitrária, temos que $\alpha \geq \sup \int_E s d\mu = \int_E f d\mu$, com $\sup$ tomado sobre todas as funções tais que $0 \leq s \leq f$. $\square$

O Teorema 4.6.5 a seguir estabelece uma das mais importantes propriedades desejadas de uma teoria consistente de integração, a saber, a de que a integral da soma de funções é igual à soma das integrais. Como foi feito em teoremas anteriores, a demonstração será dividida em casos.

Teorema 4.6.5. *Se $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mu, E)$, então $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}(\mu, E)$ e $\int_E (f_1 + f_2) d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu$, para todo $E \in \mathcal{M}$.*

Demonstração. **Caso (a)** Considere as funções características de A_1 e A_2 , $f_1 = 1_{A_1}$ e $f_2 = 1_{A_2}$.

Temos $f_1 + f_2 = 1_{A_1 - A_2} + 2 \cdot 1_{A_1 \cap A_2} + 1_{A_2 - A_1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_E f_1 + f_2 d\mu &= \mu((A_1 - A_2) \cap E) + 2\mu((A_1 \cap A_2) \cap E) + \mu((A_2 - A_1) \cap E) \\ &= \mu(A_1 \cap E) + \mu(A_2 \cap E) \\ &= \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu. \end{aligned}$$

Caso (b) As funções são funções simples. Sejam $f_1 = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ e $f_2 = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$, onde $\{A_i\}$ e $\{B_j\}$ são partições de X .

Como $f_1 + f_2 = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j}$, então

$$\int_E (f_1 + f_2) d\mu = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j \cap E).$$

Por outro lado, $f_1 = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, ou seja,

$$\int_E f_1 d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap E \cap B_j).$$

Também, $f_2 = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$. Portanto,

$$\int_E f_2 d\mu = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j \cap E) = \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n \mu(B_j \cap E \cap A_i).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap E \cap B_j) + \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n \mu(B_j \cap E \cap A_i) \\ &= \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j \cap E). \end{aligned}$$

□

Caso (c) As funções f e g são positivas.

Demonstração. Tome sequências $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ de funções simples e mensuráveis que satisfaçam

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1};$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1};$$

$$f_n \longrightarrow f;$$

$$g_n \longrightarrow g.$$

Dessa forma, como f_n e g_n são funções simples, para todo n , segue que, para todo n ,

$$\int_E f_n + g_n d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\int_E f + g d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \quad \square$$

.

Caso (d) As funções envolvidas têm sinais opostos, isto é, $f \geq 0$ e $g \leq 0$. Vamos avaliar, separadamente, os casos em que a soma é positiva e os tais que a soma é negativa.

Demonstração. Considere as seguintes convenções

$$E_+ = \{x : f(x) + g(x) \geq 0\}, \quad E_- = \{x : f(x) + g(x) < 0\},$$

e também

$$\int_E f + g d\mu = \int_E (f + g)_+ d\mu - \int_E (f + g)_- d\mu.$$

Segue que

$$\int_E (f + g)_+ d\mu = \int_{E_+} (f + g)_+ d\mu + \underbrace{\int_{E_-} (f + g)_- d\mu}_{=0} = \int_{E_+} f + g d\mu (*).$$

Note que E_+ , $f + g$, e $-g$ são funções positivas. Portanto,

$$\int_{E_+} (f + g) + (-g) d\mu = \int_{E_+} (f + g) d\mu + \int_{E_+} (-g) d\mu$$

Isso nos permite concluir que

$$\int_{E_+} (f + g) d\mu = \int_{E_+} f d\mu - \int_{E_+} (-g) d\mu = \int_{E_+} f d\mu + \int_{E_+} g d\mu.$$

Daí, voltando ao ponto em (*), segue que

$$\int_E (f + g)_+ d\mu = \int_{E_+} f d\mu + \int_{E_+} g d\mu.$$

Similarmente,

$$\int_{E_-} f + g d\mu = \int_{E_-} f d\mu + \int_{E_-} g d\mu.$$

Segue-se que $f + g \in \mathcal{L}(\mu, E)$ e, portando

$$\int_E f + g d\mu = \int_{E_+} f d\mu + \int_{E_+} g d\mu + \int_{E_-} f d\mu + \int_{E_-} g d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \quad \square$$

Caso (e) Nesse caso, serão avaliadas todas as quatro possibilidades para os sinais de f e g .

Demonstração. Iniciamos estabelecendo a seguinte convenção:

$$E = E_{++} \cup E_{+-} \cup E_{-+} \cup E_{--},$$

em que

$$E_{++} = \{x : f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \geq 0\},$$

$$E_{+-} = \{x : f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) < 0\},$$

$$E_{-+} = \{x : f(x) < 0 \text{ e } g(x) \geq 0\},$$

$$E_{--} = \{x : f(x) < 0 \text{ e } g(x) < 0\}.$$

A demonstração consiste em decompor as integrais em quatro parcelas correspondendo à partição $E = E_{++} \cup E_{+-} \cup E_{-+} \cup E_{--}$. É importante observarmos que os casos E_{++} e E_{+-} , correspondem, respectivamente, aos casos (c) e (d) aqui demonstrados.

□

O Corolário 4.6.3 a seguir estabelece um importante resultado envolvendo convergência de séries de funções, e pode ser visto como uma generalização do Teorema 4.6.5.

Corolário 4.6.3. *Seja $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mensurável, e suponha que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Então f é mensurável e $\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n(x) d\mu(x)$, para qualquer $E \in \mathcal{M}$.*

Demonstração. Como $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, é óbvio que f é mensurável. Seja $F_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$, e note que $F_{N+1}(x) \geq F_N(x)$, $\forall x \in X$, e $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x) = f(x)$. Então

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E F_N \, d\mu \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E \sum_{n=0}^N f_n \, d\mu \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_E f_n \, d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

□

A seguir, enunciaremos o famoso Lema de Fatou. Vamos enunciá-lo e, antes da demonstração, vamos apresentar um exemplo com o objetivo de elucidar o seu significado.

Lema 4.6.1. (*Lema de Fatou*) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \geq 0$, e seja $f(x) = \liminf f_n(x)$. Então, $\forall E \in \mathcal{M}$, temos*

$$\int_E f(x) \, d\mu(x) \leq \liminf \int_E f_n(x) \, d\mu(x).$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$. Essa g_n , assim definida, é uma função mensurável, para todo n . Além disso, note que

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x),$$

e que

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x),$$

pois

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k \geq n} f_k(x)}_{g_n(x)}.$$

Segue-se que $\int_E f \, d\mu = \lim \int_E g_n(x) \, d\mu$.

Por outro lado, temos $g_n(x) \leq f_n(x)$, $\forall x$. Assim, concluímos que

$$\int_E g_n(x) \, d\mu \leq \int_E f_n(x) \, d\mu.$$

Portanto, segue a conclusão do lema:

$$\int_E f \, d\mu = \lim \int_E g_n \, d\mu = \liminf \int_E g_n \, d\mu \leq \liminf \int_E f_n \, d\mu$$

□

Exemplo 4.6.2. *Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Tomada dessa forma, temos que

$$h(x) = g(1 - x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Defina a sequência $\{f_n\}$ de tal forma que

$$\begin{aligned} f_1 &= g, \\ f_2 &= h, \\ f_3 &= g, \\ f_4 &= h, \\ &\vdots \\ f_{2n} &= h, \\ f_{2n+1} &= g. \end{aligned}$$

Para ilustrar o comportamento dessa sequência vamos atribuir alguns valores para x e aplicar na sequência. Escolhamos, por exemplo, $x = 1/4$, $x = 3/4$ e $x = 1/2$.

$$\begin{aligned} x = 1/4 &\implies \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), \dots\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}, \\ x = 3/4 &\implies \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), \dots\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}, \\ x = 1/2 &\implies \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), \dots\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}. \end{aligned}$$

Com essa construção de $\{f_n\}$, fica óbvio que $\liminf f_n(x) = 0$.

Agora, considere o espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu) = ([0, 1], \mathcal{M}(m), m)$, em que m é a medida de Lebesgue. Segue que

$$\int_{[0,1]} f_n dm(x) = 1/2, \quad \forall n$$

. Esse valor corresponde à área sob o gráfico das funções f e h , para $x \in [0, 1]$. Esse fato decorre do Teorema 4.7.1. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in [0, 1]$, temos que $\liminf f_n(x) = 0$ e, portanto,

$$\int \liminf f_n dm(x) = 0.$$

Desse fato concluímos, para encerrar o exemplo, que

$$\int \liminf f_n d\mu(x) = 0 \leq \frac{1}{2} = \liminf \int f_n d\mu(x)$$

O Teorema 4.6.6 a seguir foi considerado pelo próprio Lebesgue como a sua obra mais relevante.

Teorema 4.6.6. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

Sejam $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, tais que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E \subseteq X$. Suponha que existe $g \in \mathcal{L}(\mu, E)$, onde $E \in \mathcal{M}$, tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu.$$

Demonstração. Para todo n , temos que $f_n \in \mathcal{L}(\mu, E)$. Note que $f \in \mathcal{L}(\mu, E) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}(\mu, E)$, pois $|f| = f_+ + f_-$, e, também, $|f_n(x)| \leq g(x)$. Daí, concluímos que $|f(x)| \leq g(x)$, o que nos garante que $f \in \mathcal{L}(\mu, E)$, pois $|f_n| \leq g$, donde $|f_n| \in \mathcal{L}(\mu, E)$, ou seja $f_n \in \mathcal{L}(\mu, E)$.

Em particular, $g \pm f_n \in \mathcal{L}(\mu, E)$ e $g \pm f_n \geq 0$. Além disso, $g(x) \pm f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) \pm f(x)$. Daí, pelo Lema de Fatou,

$$\int_E g \pm f d\mu \leq \liminf \int_E g \pm f_n d\mu.$$

Isso implica que

$$\int_E g d\mu \pm \int_E f d\mu \leq \liminf \int_E g d\mu \pm \int_E f_n d\mu = \int_E g d\mu + \liminf \int_E \pm f_n d\mu,$$

ou seja,

$$\pm \int_E f d\mu \leq \liminf \int_E \pm f_n d\mu,$$

isto é, em qualquer caso,

$$\int_E f d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu.$$

Por outro lado,

$$-\int_E f d\mu \leq -\limsup \int_E f_n d\mu,$$

ou seja,

$$\int_E f d\mu \geq \limsup \int_E f_n d\mu.$$

Como é sempre verdade que $\liminf \leq \limsup$, segue que

$$\int_E f d\mu = \liminf \int_E f_n d\mu = \limsup \int_E f_n d\mu.$$

Portanto, existe

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

□

Observação: Modificando as f_n fora de E , podemos supor que todas as hipóteses valham, $\forall x \in X$.

Corolário 4.6.4. *Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada de funções mensuráveis e $\mu(E) < \infty$, então $\int_E \lim f_n(x) d\mu = \lim \int_E f_n(x) d\mu$, desde que $\lim f_n(x)$ exista.*

Demonstração. Seja M tal que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in E$, $\forall n$, e ponha $g \equiv M = M1_X$.

Temos

$$\int_E g d\mu = M\mu(X \cap E) = M\mu(E) < \infty.$$

O resultado segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. $\square$

4.7 Comparação com a integral de Riemann

Lebesgue produziu sua teoria bem depois de Riemann. O modelo clássico de ilustrar a forma como cada um construiu sua integral é a seguinte: imagine que, em um saco, haja as moedas de 5, 10, 25, 50 centavos e 1 real, e que estejamos interessados em contar a quantia de dinheiro que há no saco. Então podemos proceder de dois modos distintos:

1. Podemos contar uma a uma as moedas que vão sendo retiradas do saco, somar seus valores e obter a quantia final; ou
2. Podemos ir tirando as moedas e ir agrupando-as de acordo com seus respectivos valores e, por fim, somamos essas quantias e obtemos a quantia total.

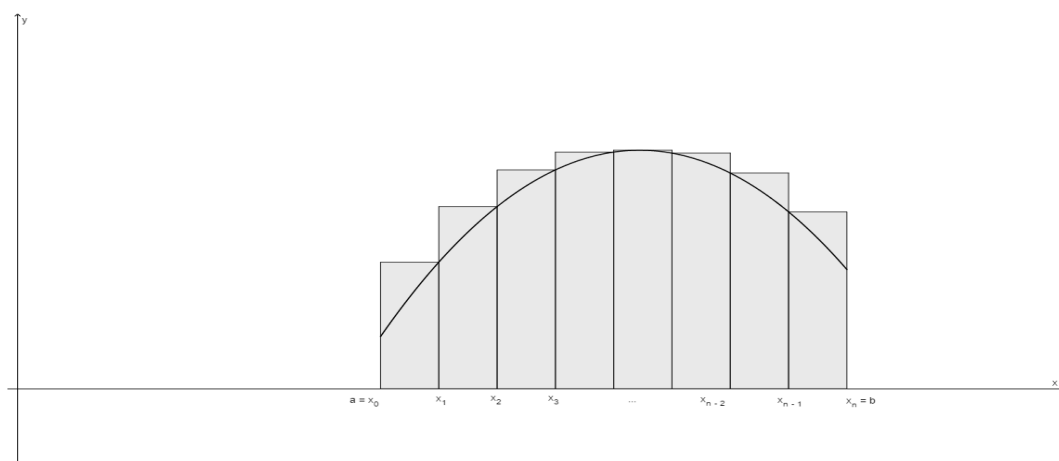
Notamos que o segundo modo envolve uma escrita mais elaborada para ser desenvolvida, em relação ao primeiro modo, mas ambas apresentam formas equivalentes de contagem das moedas. Riemann, ao construir sua teoria de integral, utilizou o primeiro método, e Lebesgue utilizou o segundo método.

Essa forma de ilustrar o processo no sentido matemático significa que para a integral de Riemann particionamos o domínio e depois obtemos as imagens correspondentes aos pontos desse domínio. No entanto, para a integral de Lebesgue, particionamos a imagem e calculamos a pré-imagem dos valores desse intervalo, que é levado pela função na imagem escolhida.

Geometricamente, ambas as formas de particionar a função podem ser observadas nas Figuras 9, 10 e 11. Para tais figuras abaixo vamos considerar o caso em que tomamos uma função contínua.

A soma superior de Darboux é uma boa aproximação, por excesso, da área da função sob o gráfico, e, como vimos, a integral superior é tomada como o ínfimo de todas

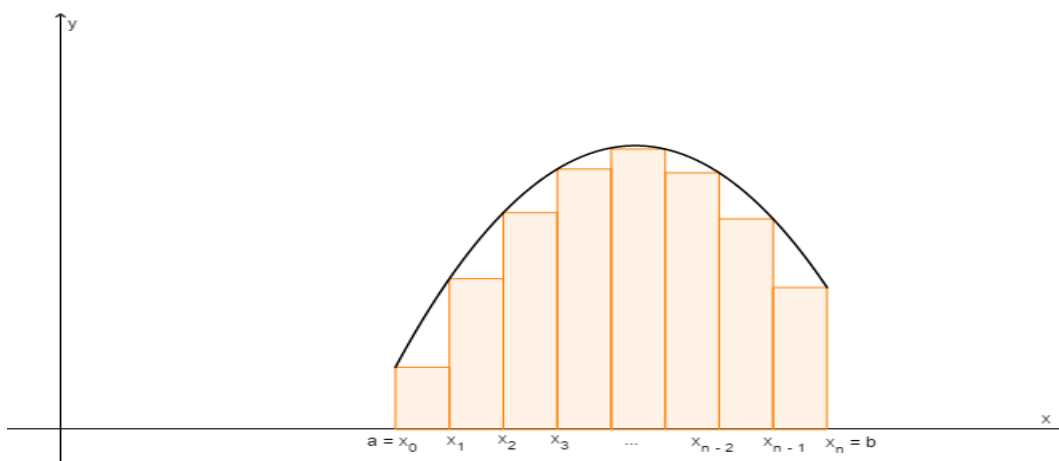
Figura 9 – Integral superior de Riemann



Fonte: elaborada pelo autor

as somas superiores que a função admite. À medida que refinamos a partição tomada sobre o domínio, tomamos cada vez mais valores próximos, e, à medida que prosseguimos com esse processo, a integral superior tende, no limite, a ter o mesmo valor numérico que a área da função.

Figura 10 – Integral inferior de Riemann

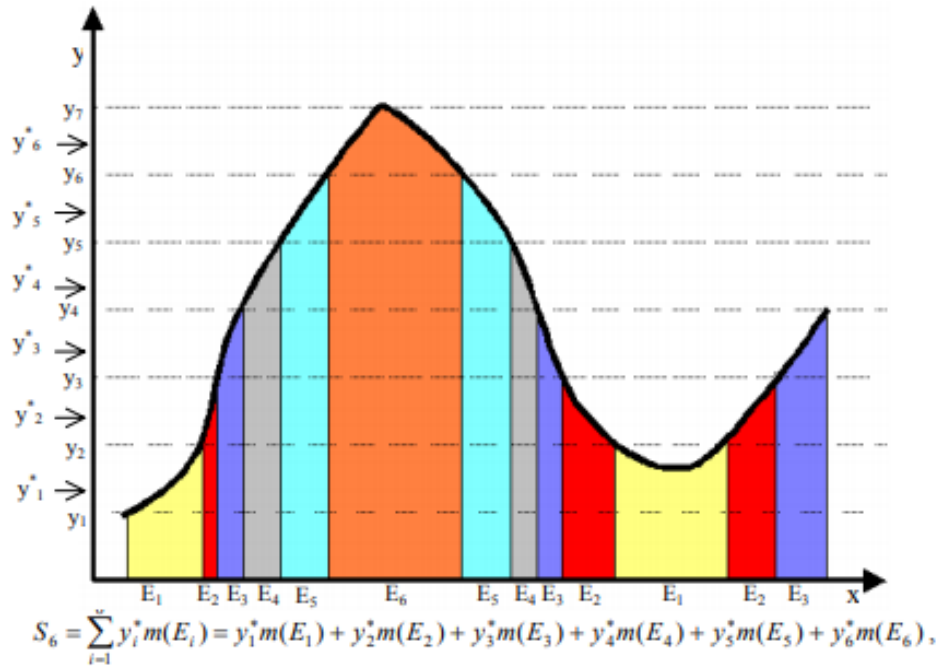


Fonte: elaborada pelo autor

De forma similar à soma superior, a soma inferior tomada sobre todas as partições também fornece uma aproximação para a área da função, no entanto, essa aproximação é por falta. A integral inferior é definida como o supremo de todas as somas inferiores e, à medida que tomamos valores no domínio cada vez mais próximos, essa integral também se aproxima da área da função. No limite quando a integral inferior fornecer o mesmo valor que a integral superior, diremos que a função é Riemann integrável.

Para a definição de integral de Lebesgue, particionamos a função de forma diferente. Vemos, na Figura 11, que a imagem foi particionada e cada intervalo da partição

Figura 11 – Integral de Lebesgue



Fonte: (PALARO, 2006, p.145)

é formado por uma união de intervalos disjuntos. Lebesgue toma um ponto arbitrário sobre um determinado intervalo e utiliza a medida $m(E_i)$ para representar a medida desse intervalo. Já vimos, anteriormente, que, se tratando de intervalos da reta real, essa medida está associada ao tamanho do intervalo. Para finalizar com sua ideia de integral, Lebesgue toma o somatório do produto de cada valor arbitrário de cada intervalo pela medida do intervalo, e o limite desse somatório fornece o valor da sua integral.

Esclarecidos os aspectos geométricos, passaremos a um resultado que estabelece a integral de Riemann como um caso particular da integral de Lebesgue. A demonstração do teorema é dada para o caso de uma função definida em $\mathbb{R}$, mas uma modificação conveniente prova um resultado similar para uma função f definida num bloco em $\mathbb{R}^n$. Podemos encontrar uma demonstração similar em (ISNARD, 2009).

Teorema 4.7.1. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Riemann integrável (logo, limitada), então $f \in \mathcal{L}([a, b], m)$ e*

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x) dm(x)}_{\text{Integral de Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Integral de Riemann}} .$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, seja P_n uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que $\mathcal{S}(f, P_n) - s(f, P_n) < \frac{1}{n}$. Substituindo cada P_n por um refinamento comum de $P_1, P_2, \dots, P_n$, podemos supor que P_{n+1} é um refinamento de P_n .

Definamos $U_n(x) = \sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t)$ caso $x \in (x_{i-1}, x_i]$ onde $P_n = \{x_0 < x_1 < \dots < x_l\}$ e ponhamos $U_n(a) = f(a)$.

Similarmente, seja $L_n(x) = \inf_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t)$ caso $x \in (x_{i-1}, x_i]$ e $L_n(a) = f(a)$.

Então temos $L_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$.

Além disso, $L_n(x) \leq L_{n+1}(x)$ e $U_n(x) \geq U_{n+1}(x)$, pois $U_{n+1}(x)$ é o supremo de f num intervalo I , $U_n(x)$ é o supremo de f num intervalo J , sendo que $I \subseteq J$.

Similarmente quanto à L_n .

Sejam $U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x)$ e $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x)$.

Note que

$$\int_{[a,b]} U_n(x) dm(x) = \sum_{i=1}^l M_i m((x_{i-1}, x_i]) = \sum_{i=1}^l M_i \text{vol}((x_{i-1}, x_i]) = \mathcal{S}(f, P_n)$$

e, da mesma forma,

$$\int_{[a,b]} L_n(x) dm(x) = s(f, P_n).$$

Como f é Riemann-integrável, f é limitada e, portanto, existe $M > 0$ tal que

$$-M \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b],$$

ou seja,

$$-M \leq \sup_{t \in (x_{i-1}, x_i)} f(t) \leq M \quad \text{e} \quad -M \leq \inf_{t \in (x_{i-1}, x_i)} f(t) \leq M.$$

Logo, $|L_n(x)| \leq M$ e $|U_n(x)| \leq M$, $\forall x$, e a função constante M é integrável em $[a, b]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, P_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} U_n(x) dm(x) \\ &\stackrel{T.C.D.L}{=} \int_{[a,b]} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) dm(x) \\ &= \int_{[a,b]} U(x) dm(x). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} L(x) dm(x).$$

Portanto,

$$\int_{[a, b]} U_n(x) - L(x) dm(x) = 0.$$

Como

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) \leq f(x) \quad \text{e} \quad U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) \geq f(x),$$

então $U - L \geq 0$, o que nos garante que $U = L$ quase sempre.

Seja $E = \{x \in [a, b] : L(x) \neq U(x)\}$. Sabemos que $m(E) = 0$, e, além disso, quando $x \notin E$, ocorre que $f(x) = L(x) = U(x)$.

Vamos provar que f é mensurável, isto é, $\{x : f(x) < a\}$ é mensurável, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Temos que, se $x \notin E$, então

$$\begin{aligned} f(x) = L(x) = U(x) &= \{x \in E : f(x) < a\} \cup \{x \notin E; f(x) = L(x) < a\} \\ &= \{x \in E : f(x) < a\} \cup (E^c \cap \{x \in [a, b] : L(x) < a\}) \end{aligned}$$

é mensurável, pois $\{x \in E : f(x) < a\} \subseteq E$ e L é função mensurável. Isso prova que f é mensurável.

Como f é limitada e $m([a, b]) < \infty$, temos que $f \in \mathcal{L}(m, [a, b])$. Também $f = L$ quase sempre, donde:

$$\int_{[a, b]} f(x) dm(x) = \int_{[a, b]} L(x) dm(x) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

Matematicamente, o Teorema 4.7.1 tem por objetivo mostrar que toda função integrável no sentido de Riemann em um intervalo também é integrável no sentido de Lebesgue no mesmo intervalo. Poderemos inferir, também desse teorema, que as funções integráveis no sentido de Riemann estão sujeitas a condições de continuidade rigorosas.

Na Seção 3.4, foi apresentado o exemplo da função de Dirichlet. Tal função não é integrável no sentido de Riemann, porque a sua integral superior é igual a 1 e a sua integral inferior é igual a zero, em qualquer intervalo não degenerado $[a, b]$, logo diferentes. Porém, a função é quase sempre zero, não sendo zero exceto no conjunto dos racionais do intervalo $[a, b]$. Esse conjunto tem medida de Lebesgue igual a zero, ou seja, é mensurável (isto é, integrável). Logo, a integral da função de Dirichlet (integral de Lebesgue) é igual a zero.

De acordo com (RUDIN, 1976), muito além do fato de que a teoria de Lebesgue nos permite integrar uma classe muito ampla de funções, sua maior qualidade talvez seja a facilidade com a qual muitas operações de limite podem ser tratadas. De acordo com esse ponto de vista, a convergência dos teoremas de Lebesgue pode muito bem ser considerada como o cerne da teoria.

Uma das dificuldades encontradas na teoria de Riemann é que limites de algumas sequências de funções integráveis no sentido de Riemann podem não ser integráveis. Essa dificuldade é eliminada na teoria de Lebesgue, uma vez que os limites de sequências de funções mensuráveis são sempre mensuráveis.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve por objetivo mostrar, de modo sucinto, a evolução dos conceitos ligados aos processos de integração, bem como os principais contribuintes para esse desenvolvimento. Vimos que o início embrionário da noção de integral remonta à Grécia Antiga e segue até o início do século XX, com as ideias de Lebesgue. Obviamente, o seu desenvolvimento não para por aí, mas nos propomos a estudar apenas dentro desse período. Foi feito um breve passeio histórico com um enfoque maior dado aos conceitos que envolvem a construção da integral de Lebesgue. Tal integral tem grandes aplicações em diversas áreas, como em Teoria das Distribuições, Teoria das Probabilidades, Análise Funcional, Equações Diferenciais e Cálculo das Variações, e isso justifica sua escolha.

Foi mostrado que a integral de Riemann é um caso particular da integral de Lebesgue, e que muitos dos inconvenientes que a integral de Riemann não solucionou, a integral de Lebesgue resolveu, ampliando, assim, a classe das funções integráveis graças à introdução do conceito de medida de um conjunto, no desenvolvimento da sua teoria. Ao criar sua teoria de integração baseada na teoria da medida Lebesgue, conseguiu construir hipóteses mais simples para a integração de uma função.

Esse trabalho cumpriu um objetivo de nos apresentar um tópico de Matemática avançada não visto em cursos de licenciatura. Essa exposição se torna importante porque abre um grande horizonte no que tange à possibilidade de estudos futuros em curso de pós-graduação *strictu sensu*, cumprindo um dos objetivos da licenciatura no que tange ao desenvolvimento de pesquisa em outras áreas além do ensino.

Referências

- BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. 2. ed. São Paulo: Blüncher, 1996.
- COELHO, E. R. de S. *Introdução à integral de Lebesgue*. 2012. 59 f. Licenciatura em Matemática — Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2012. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/871/1/PDF/%20-%20Emanuela%20R%C3%A9gia%20de%20Sousa%20Coelho>>. Acesso em: 10 mar. 2019.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- ISNARD, C. *Introdução à medida e integração*. 2. ed. São Paulo: IMPA, 2009.
- MARQUES, M. S. de F. *Teoria da medida*. Campinas: Editora da Unicamp, 2009.
- PALARO, L. A. *A concepção de educação matemática de Henri Lebesgue*. 2006. 340 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11058>>. Acesso em: 10 mar. 2019.
- RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*. 5. ed. Washington: McGraw-Hill, 1976.
- SILVA, B. M. *A integral de Lebesgue na reta e teoremas de convergência*. 2017. 35 f. Bacharelado em Matemática — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/20724/3/IntegralLebesgueReta.pdf>>. Acesso em: 31 maio 2019.