



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS.**

**CAMPUS PALMAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

RAFAEL PIMENTA ALVES

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DE CONTROLE DE
SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZAS POLITÓPICAS BASEADOS
EM LMIs**

**Palmas - TO
2017**

RAFAEL PIMENTA ALVES

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DE CONTROLE DE
SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZAS POLITÓPICAS BASEADOS
EM LMIs**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
coordenação do curso de Licenciatura em Mate-
mática do Instituto Federal do Tocantins - Cam-
pus Palmas, como exigência à obtenção do grau
de graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientado: Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza

**Palmas-TO
2017**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvida pelo Serviço Técnico da Biblioteca João Paulo II

Alves, Rafael Pimenta

Fundamentos matemáticos da teoria de controle de sistemas lineares com incertezas politópicas baseados em LMIs / Rafael Pimenta Alves. - Palmas, 2017
56 f.

Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Tocantins - Campus Palmas, 2017.

Orientador(a): Prof. Wallysonn Alves de Souza

1. Estabilidade. 2. Incertezas politópicas. 3. LMIs. 4. Aplicações de matemática. I. Título



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Fundamentos Matemáticos da Teoria de Controle de Sistemas Lineares com Incertezas Politépicas Baseadas em LMIs.

AUTOR: Rafael Pimenta Alves.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Wallysonn Alves de Sousa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas, como parte das exigências para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 16/10/2017.

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Sousa
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador

Prof. Me. Edson Luiz Kraemer
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 1

Prof. Dr. Maxwell Moura Costa
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 2 - Membro Externo

Ao Senhor de todas as coisas.

*À minha família Lourdes Aparecida Pimenta
Alves, Marajá Alves e Ana Carolina Pimenta
Alves.*

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para que eu pudesse chegar até aqui. Em especial, agradeço:

- A Deus, que me deu forças, saúde e paz todos esses anos.
- À minha família, Marajá Alves, Lourdes Aparecida Pimenta Alves e Ana Carolina Pimenta Alves que me deram tudo que precisei, atenção, carinho e amor.
- Ao Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza, por ser um ótimo professor, por todos os ensinamentos e orientação para conclusão desse trabalho.
- Aos Professores Tiago Bandeira Castro, Edson Luiz Kraemer, Mágnio Márcio de Azevedo e Rodrigo Carvalho Dias, por me concedido inspiração e a assistência quanto professor.
- À minha namorada Sarah Cristina da Costa Sousa, pela paciência comigo e por ser esta pessoa maravilhosa.
- Aos meus amigos Amanda, Carlos, Davi, Isabel, Ramiz e Valéria que me acompanham até o fim dessa jornada.
- A todos os professores e funcionários do IFTO.
- Ao IFTO - Instituto Federal de Educação ciência e Tecnologia do Tocantins.

Resumo

Este trabalho combina os conceitos de álgebra linear com a teoria de estabilidade de Lyapunov para fundamentar condições para a análise de estabilidades e projeto de controladores de sistemas lineares incertos e invariantes no tempo, baseado em desigualdades matriciais lineares (do inglês “*Linear Matrix Inequalities - LMIs*”). Inicialmente é realizado um estudo de tópicos de álgebra linear que são importantes para fundamentar a teoria de estabilidade de Lyapunov e, conseqüentemente, a teoria de controle com projetos baseados em LMIs. A metodologia apresentada permite inserir índices de desempenho como, por exemplo, taxa de decaimento. Para ilustrar a eficiência da metodologia apresentada, Simulações numéricas e o projeto de controle robusto de um pêndulo invertido foram realizadas. As simulações foram feitas utilizando o *software* MATLAB.

Palavras-chaves: Estabilidade. Incertezas politópicas. LMIs. Aplicações de matemática.

Abstract

This work combines the concepts of linear algebra with Lyapunov stability theory to substantiate the conditions for stability analysis and design of controllers of uncertain and linear time-invariant systems based on Linear Matrix Inequalities - LMIs. Initially, a study of linear algebra topics is carried out that are important to substantiate the Lyapunov stability theory and, consequently, control theory with LMIs based projects. The presented methodology allows to insert indexes of performance as, for instance, decay rate. To illustrate the efficiency of the methodology, numerical simulations and the design of a robust control system for an inverted pendulum, were performed. For the simulations, the MATLAB software was used.

Key-words: Stability. Polytopic uncertainties. LMIs. Mathematical Applications.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da função $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$	29
Figura 2 – Conjunto Convexo, considerando $x = x_1$ e $y = x_2$	31
Figura 3 – Politopo convexo	33
Figura 4 – Comportamento estável e instável, mecanicamente, no sentido de Lyapunov.	34
Figura 5 – Comportamento da solução de um sistema assintoticamente estável. . .	35
Figura 6 – Exemplo de LMI	38
Figura 7 – Pêndulo invertido	44
Figura 8 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Estabilidade.	47
Figura 9 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Estabilidade com taxa de decaimento $\alpha = 2$	48
Figura 10 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Sistema incerto.	50
Figura 11 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Sistema incerto com taxa de decaimento $\alpha = 2$	51

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores dos parâmetros do pêndulo invertido.	45
---	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRÉ-REQUISITOS DE ÁLGEBRA LINEAR	15
2.1	Matrizes	15
2.1.1	Matriz retangular	15
2.1.2	Matriz quadrada	15
2.1.3	Matriz triangular	16
2.1.4	Matriz diagonal	17
2.1.5	Matriz identidade	17
2.1.6	Matriz transposta	17
2.1.7	Matriz simétrica	18
2.2	Autovalores e autovetores	18
2.2.1	Determinação dos autovetores e autovalores	19
2.3	Forma quadráticas	21
2.3.1	Matriz simétrica definida positiva	22
2.3.2	Teste para definida positiva	27
3	ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS VIA LMIS	31
3.1	Convexidade	31
3.1.1	Politopos convexos	32
3.2	Estabilidade Quadrática	33
3.3	Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs	37
3.3.1	Estabilidade de sistemas lineares com realimentação dos estados	39
3.3.2	Taxa de decaimento para sistema com realimentação de estado	40
3.3.3	Estabilidade de sistemas lineares com incertezas politópicas	42
4	APLICAÇÃO	44
4.1	Pêndulo invertido	44
4.2	Simulações	46
4.2.1	Caso 1: Estabilidade	46
4.2.2	Caso 2: Estabilidade com taxa de decaimento $\alpha = 2$	47
4.2.3	Caso 3: Estabilidade de sistemas com incertezas	48
4.2.4	Caso 4: Estabilidade de sistemas incertos com taxa de decaimento $\alpha = 2$	49
5	CONCLUSÃO	52

	REFERÊNCIAS	53
A	APÊNDICE A	55
A.1	Estabilidade de sistemas lineares com taxa de decaimento . . .	55
A.2	Estabilidade de sistemas incertos com taxa de decaimento . . .	57

1 INTRODUÇÃO

Um dos mais desafiadores problemas da matemática é criar modelos que possam descrever, com máxima precisão possível, os fenômenos presentes na natureza e suas aplicações. A busca por esses modelos matemáticos, que reproduzam a natureza e suas interações, tem aumentado em todas as áreas do conhecimento humano como consequência do avanço tecnológico. Uma das áreas que mais avançaram foi a modelagem matemática de sistemas dinâmicos, visto que nas últimas décadas foram criados sofisticados algoritmos para a resolução de problemas que, até então, eram necessários dias para encontrar a solução do mesmo. Com o avanço da modelagem matemática, a teoria de controle, que estuda os projetos de controle de sistemas dinâmicos, lineares ou não lineares, com o objetivo de “moldar” o comportamento de suas soluções, ganhou maior visibilidade, se destacando como um grande e importante campo de aplicação da matemática, amplamente utilizado na sociedade moderna, desde simples aplicações, como o controle de temperatura de ar condicionado, até em sistemas altamente sofisticados, como em aviões e satélites. Assim, devido a ampla aplicabilidade, cresceu o interesse no estudo dos problemas vinculados à sistemas de controle.

Este trabalho apresenta um estudo dos fundamentos matemáticos da teoria de controle de estabilidade de sistemas lineares com incertezas politópicas baseados em desigualdades matriciais lineares (do inglês “*Linear Matrix Inequalities - LMIs*”), que é uma técnica moderna de análise e projeto de sistema de controle, em função do tempo, com grande relevância científica na atualidade.

Segundo Boyd *et al.* (1994, p.2), apud (SOUZA *et al.*, 2013, p.14) a história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos surgiram há mais de 100 anos e começa em cerca de 1890, quando Lyapunov publica pela primeira vez o que chamados hoje de teoria de Lyapunov. Naquela época, o teorema de Lyapunov, adaptado para sistemas lineares invariantes no tempo, poderia ser elaborado em termos de LMIs. Mais precisamente na década de 80 foram desenvolvidos meios que possibilitou a conversão de problemas de controle em problemas convexos, como por exemplo, com o trabalho de Bernussou, Peres e Geromel (1989). Partindo desse pressuposto, garantir a estabilidade de sistemas lineares com realimentação de estado é equivalentemente dizer que estamos procurando um ganho estabilizante K e uma matriz de Lyapunov P simétrica positiva definida.

Em seguida, apareceram novas condições baseadas em LMIs que garantiam a estabilidade assintótica global de sistemas não lineares, principalmente utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno como, por exemplo, (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). Nas últimas décadas, as metodologias de projetos de controladores baseados em LMIs ganhou muito

espaço na comunidade científica nacional e internacional como pode ser visto, por exemplo, em: (RAMOS; PERES, 2002), (MONTAGNER *et al.*, 2005), (CARDIM *et al.*, 2009), (MOZELLI; PALHARES, 2011), (SILVA *et al.*, 2012), (SOUZA *et al.*, 2013), (SOUZA *et al.*, 2013), (SOUZA *et al.*, 2014). Para um sistema dinâmico qualquer ser controlado, seja ele linear ou não linear, é importante que tenhamos um modelo matemático preciso, e ao desenvolver técnicas de sistema de controle, sejam elas clássicas ou modernas, é imprescindível que se perceba a importância da Matemática para sua fundamentação. Neste sentido, este trabalho pretende focar no estudo dos fundamentos matemáticos de controle de sistemas lineares e ficará restrito às metodologias baseadas em LMIs.

O objetivo é fazer uma fundamentação matemática e análise da teoria de controle de sistemas lineares baseado em LMIs. Os resultados obtidos partiram de simulações computacionais realizadas pelo *software* MATLAB com a linguagem do YALMIP (LOFBERG, 2004), com o solver LMILAB (GAHINET *et al.*, 1995).

Como supramencionado, projetos de controladores, baseados em LMIs, com e sem incertezas na planta e taxa de decaimento, vem se destacando muito na comunidade científica e, desta forma, acreditamos que é relevante o estudo de teorias matemáticas que facilite o desenvolvimento de novas técnicas de análise e síntese de controle e o aprimoramento das existentes. Para a realização da fundamentação matemática da teoria de controle baseados em LMIs, este trabalho foi organizado da seguinte forma:

No segundo capítulo apresenta conceitos preliminares de matrizes, vetores e suas propriedades, que posteriormente serão usados para o desenvolvimento de algumas demonstrações de teoremas que serão necessários para dissertar sobre a estabilidade de um sistema linear invariante no tempo. Serão apresentados pré-requisitos fundamentais para a construção deste modelo. Será definida matriz simétrica positiva definida e introduzido o conceito de conjunto convexo, que terão grande influência no estudo dos sistemas de controles.

No terceiro capítulo é proposto quatro métodos baseados em LMIs para a estabilidade de sistemas lineares no domínio do tempo, sendo estes: Estabilidade de sistemas lineares, Estabilidade de sistemas lineares com taxa de decaimento, estabilidade de sistemas com incertezas politópicas e estabilidade de sistemas incertos com taxa de decaimento. Serão apresentados a generalização dos métodos e teoremas que garante a estabilidade dos sistemas utilizando, respectivamente cada método.

No quarto capítulo, apresenta-se uma aplicação no pêndulo invertido que consiste em uma haste fixa a um carrinho, sendo ela com possibilidade de movimento angular. A haste tenta cair sobre o efeito da gravidade, portanto é um sistema naturalmente instável. O sistema pode ser estabilizado aplicando uma força horizontal no carrinho, fazendo a haste encontrar seu ponto de equilíbrio, assim ficando na vertical. E a partir da equação

do pêndulo será estudado os resultados das simulações realizadas no *Software* MATLAB.

No quinto capítulo apresenta-se as conclusões e faz-se um apanhado geral do trabalho, descrevendo o que foi feito em cada capítulo e também apresenta-se perspectivas futuras para a pesquisa da teoria de controle baseadas em LMIs.

Por fim, no Apêndice A, são apresentados os algoritmos usados no MATLAB para a resolução de LMIs adotado neste trabalho.

2 PRÉ-REQUISITOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo vamos discorrer sobre alguns resultados de álgebra linear, importantes para a fundamentar esse trabalho.

2.1 Matrizes

Definição 2.1.1. *Denomina-se matriz $m \times n$ uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De forma geral escrevemos $A = A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$, para denotar uma matriz m por n . Desta forma, estamos informando que o elemento que está na interseção da linha i com a coluna j é igual a a_{ij} , para todos os inteiros i e j , tais que, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, isto é,

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ com } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ e } i, j \in \mathbb{N}.$$

Os números m e n representam a dimensão da matriz.

Uma matriz que possui uma única linha é chamada de matriz linha e, da mesma forma, uma matriz que possui apenas uma coluna é chamada de matriz coluna.

2.1.1 Matriz retangular

Uma matriz $A_{m \times n}$ é dita retangular, se e somente se, $m \neq n$.

Exemplo 2.1.1. *Seja a matriz $A_{2 \times 4}$, tal que*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Matriz quadrada

Considere uma matriz $m \times n$, quando $m = n$, diz-se que a matriz é quadrada do tipo $n \times n$ ou simplesmente de ordem n .

Exemplo 2.1.2. *Considerando a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Note que em A a quantidade de linhas e de colunas é exatamente a mesma, portanto é uma matriz quadrada.

Considerando a matriz quadrada do exemplo (2.1.2):

1. Se $i = j$, então a_{ij} pertence as diagonal principal.
2. Se $i > j$, então a_{ij} está abaixo da diagonal principal.
3. Se $i < j$, então a_{ij} está acima da diagonal principal.

2.1.3 Matriz triangular

Vamos considerar uma matriz quadrada de ordem n . Onde os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, então essa matriz é dita matriz triangular superior.

Exemplo 2.1.3. *Seja a matriz M , tal qual*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deforma análoga definimos matriz triangular inferior, basta tomar uma matriz N , tal que seus elementos acima da diagonal principal seja todos nulos.

Exemplo 2.1.4. *Seja a matriz N , tal qual*

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 2.1.1. *Toda matriz triangular é quadrada, entretanto a recíproca dessa afirmação não é válida.*

2.1.4 Matriz diagonal

A matriz A de ordem n é dita diagonal, se todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal forem nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

Exemplo 2.1.5. *Seja a matriz diagonal A , tal que*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.1.5 Matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero é chamada de matriz identidade e seu símbolo é I_n .

Propriedade 2.1.1. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n , então $A \cdot I_n = A$.*

2.1.6 Matriz transposta

Definição 2.1.2. *Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a matriz transposta de A é a matriz, denotada por A^T , de ordem $n \times m$ que se obtém da matriz A permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice.*

Exemplo 2.1.6. *Seja a matriz $A_{2 \times 3}$, tal que:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

então,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Propriedade 2.1.2. *Propriedades da Matriz Transposta:*

$$i) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$ii) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$iii) (A^T)^T = A$$

$$iv) (AB)^T = B^T A^T$$

2.1.7 Matriz simétrica

Definição 2.1.3. *Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada. Dizemos que A é simétrica se $A = A^T$*

Outra forma de enunciarmos a definição 2.1.3 é fazendo igualdades de elementos de matrizes. Dizemos que uma matriz é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$, com $1 \leq i, j \leq n$.

Exemplo 2.1.7. *Seja a matriz $A_{2 \times 2}$*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

note que

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

logo, a matriz é simétrica, pois $A = A^T$

Propriedade 2.1.3. *Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica.*

2.2 Autovalores e autovetores

Segundo Leon (2011, p.263), autovalores são

Uma parte comum em nossa vida quer notemos isso ou não. Onde houver vibrações haverá autovalores, as frequências naturais das vibrações. Se você já afinou um violão, você resolveu um problema de autovalores. Quando engenheiros projetam estruturas, eles se preocupam com frequências de vibração de estruturas. Esta preocupação é particularmente importante em regiões sujeitas a terremoto como a Califórnia. Os autovalores de um problema com condições de fronteira podem ser usados para determinar os estados energéticos de um átomo ou cargas críticas que causam flexão em uma viga.

Como pode ser visto os autovalores desenvolvem um papel fundamental nas aplicações da Matemática e, como veremos a seguir, é muito importante para fundamentar a teoria de controle e principalmente em projetos baseados em LMIs.

Nesta seção, vamos definir autovalores e autovetores e destacar suas principais propriedades.

Definição 2.2.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é um autovetor do operador T se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$T(v) = \lambda v.$$

O número real λ , tal que $T(v) = \lambda v$ é autovalor de T associado ao autovetor v .

Admitindo que A seja a matriz do operador T , da definição (2.2.1), e que a dimensão de V é n , pode-se reescrever a definição (2.2.1) da seguinte forma:

Definição 2.2.2. *Seja A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é dito autovalor de A se existir um vetor não nulo v tal que $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de autovetor associado ao autovalor λ .*

“Um vetor $v \neq 0$, é vetor próprio se a imagem $T(v)$ for um múltiplo escalar de v . No $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ diríamos v e $T(v)$ têm a mesma direção. Assim, dependendo do valor de λ o operador T dilata v , contrai v , inverte o sentido de v ou o anula no caso de $\lambda = 0$.”(STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.276)

2.2.1 Determinação dos autovetores e autovalores

Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuja matriz na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

sendo v autovetor, e λ autovalor do operador T , tem-se que:

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \quad (2.1)$$

sabendo que $v = Iv$, com I sendo a matriz identidade de ordem n , então a equação (2.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v = 0 \quad (2.2)$$

note que essa equação resulta em um sistema homogêneo de ordem n , onde o termo independente de todas as equações são iguais a zero, portanto, ele admite uma solução onde todas as variáveis são nulas (solução trivial). Para que o sistema (2.2) admita soluções não nulas, ou seja, $v \neq 0$, devemos impor que $\det(A - \lambda I) = 0$, portanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

a equação (2.3), isto é $\det(A - \lambda I) = 0$, é chamada de equação característica do operador T , ou da matriz A , e suas raízes são os autovalores do operador. De posse dos autovalores substituímos eles na equação (2.2) e obtemos os autovetores associados a cada autovalor.

Exemplo 2.2.1. Vamos determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T(v) = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$

A matriz T , na base canônica, é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

seja λ o autovalor de A e v o vetor associado ao λ . Assim,

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \quad (2.4)$$

como $v \neq 0$, para que o sistema (2.4) admite solução diferente da solução trivial, devemos ter:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 - \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

de (2.5), temos a equação característica $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$ cujas raízes são os autovalores: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$. Para determinar os autovetores associados devemos considerar o sistema linear homogêneo (2.4).

Considerando $v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, o sistema (2.4) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)x - y + z = 0 \\ -x + (5 - \lambda)y - z = 0 \\ x - y + (3 - \lambda)z = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

I) Encontrando a autovetor associado ao autovalor 2.

Substituindo λ por 2 no sistema (2.5), obtém-se os vetores próprios associado a $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

o sistema (2.6) admite uma infinidade de soluções, a saber,

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

assim, os vetores do tipo $v_1 = \begin{bmatrix} x & 0 & -x \end{bmatrix}^T$, ou $v_1 = x \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_1 = 2$.

II) Encontrando a autovetor associado ao autovalor 3.

Substituindo λ por 3 no sistema (2.5), obtém-se os vetores próprios associado a $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

o sistema (2.7) admite uma infinidade de soluções, da forma,

$$\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

assim, os vetores do tipo $v_2 = \begin{bmatrix} x & x & x \end{bmatrix}^T$, ou $v_2 = x \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_2 = 3$.

III) Encontrando a autovetor associado ao autovalor 6.

Substituindo λ por 6 no sistema (2.5), obtém-se os vetores próprios associado a $\lambda_3 = 6$.

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

o sistema (2.8) admite uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

assim, os vetores do tipo $v_3 = \begin{bmatrix} x & -2x & x \end{bmatrix}^T$, ou $v_3 = x \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_3 = 6$.

2.3 Forma quadráticas

Definição 2.3.1. *Seja $A_{m \times n}$ uma matriz simétrica, isto é, $A = A^T$. A função escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^T A x$, sendo x um vetor coluna, é chamada de forma quadrática.*

Para classificar as formas quadráticas em: definida positiva, semi-definida positiva, definida negativa, semi-definida negativa e indefinida, nós apresentaremos uma definição semelhante a definição 2.3.1, que de fato é de grande importância para fundamentar o conceito de LMIs.

Definição 2.3.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^T A x$, com $A = A^T$, uma forma quadrática:*

- i) Se $f(x) = x^T A x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que f é definida positiva.
- ii) Se $f(x) = x^T A x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que f é semi-definida positiva.
- iii) Se $f(x) = x^T A x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que f é definida negativa.
- iv) Se $f(x) = x^T A x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que f é semi-definida negativa.
- v) Se existir $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, tal que $f(x) = x^T A x \leq 0$ e $f(x) = x^T A x > 0$, dizemos que a forma quadrática é indefinida.

2.3.1 Matriz simétrica definida positiva

O estudo da matriz simétrica definida positiva se justifica pela grande variedade de aplicações e, devido sua grande importância para fundamentar o conceito de LMIs, reservaremos esta seção para o estudo de suas propriedades. Essa seção está seguindo a linha de (LEON, 2011).

Definição 2.3.3. *Dizemos que uma matriz simétrica $A_{m \times n}$ é definida positiva se a sua forma quadrática associada é positiva definida, isto é, se $x^T A x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.*

Observação 2.3.1. *De forma análoga, à definição (2.3.3), podemos definir matriz simétrica semi-definida positiva, definida negativa e semi-definida negativa como sendo $x^T A x \geq 0, x^T A x < 0, x^T A x \leq 0$, respectivamente.*

Teorema 2.3.1. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz real simétrica. Então, A será definida positiva, se somente se, todos os seus autovalores forem positivos.*

Demonstração. Se A é definida positiva e λ é um autovalor de A , então, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, autovetor associado a λ ,

$$x^T A x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \neq 0, \text{ tal que } x \in \mathbb{R}^n$$

logo,

$$\lambda = \frac{x^T A x}{\|x\|^2} > 0$$

reciprocamente, suponha que todos os autovalores de A são positivos. Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto ortonormal de autovetores de A . Se x é qualquer vetor não nulo em $\mathbb{R}^n$, então x pode ser escrito sob forma

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

no qual

$$\alpha_i = x^T x_i, \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \|x\|^2 > 0$$

segue-se que

$$\begin{aligned} x^T A x &= x^T (\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \\ &\geq (\min \lambda_i) \|x\|^2 > 0 \end{aligned}$$

e, portanto, A é definida positiva. $\square$

Propriedade 2.3.1. *Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então A é não-singular.*

Demonstração. Suponha por absurdo que A é singular, então $\lambda = 0$ seria um autovalor de A , no entanto, por hipótese temos que A é definida positiva, o teorema 2.3.1 nos garante que todos os autovalores de A são positivos, isso nos leva a um absurdo, logo não podemos supor que A é singular. $\square$

Propriedade 2.3.2. *Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então $\det(A) > 0$.*

Demonstração. A demonstração desta propriedade pode ser vista em (LEON, 2011, p.339). $\square$

Definição 2.3.4. *Dada uma matriz A , $n \times n$, seja A_r a matriz formada pelos cantos superiores à esquerda, sempre tomando as r primeiras linhas e colunas, ($r = 1, 2, 3, \dots, n$). A_r é chamada de matriz líder ou submatriz principal de ordem r de A .*

Propriedade 2.3.3. *Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então as submatrizes principais iniciais $A_1, A_2, \dots, A_n$ de A , são todas definidas positivas, então A_r é não-singular e $\det(A_r) > 0$.*

Demonstração. Para mostrar que A_r é definida positiva, $1 \leq r \leq n$, seja $x_r = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \end{bmatrix}^T$ qualquer vetor não nulo em $\mathbb{R}^r$, defina-se

$$x_r = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

já que

$$x_r^T A_r x_r = x^T A x > 0, \quad (2.9)$$

pois A é definida positiva. Logo, segue-se que A_r é definida positiva. $\square$

Em álgebra linear, algumas operações são consideradas elementares para manipular matrizes. Assim, em função das propriedades a seguir vamos estabelecer as seguintes operações elementares sobre linhas:

- i) Intercambiar duas linhas.
- ii) Multiplicar uma linha por um número real diferente de zero.
- iii) Subtrair uma linha por sua soma a um múltiplo de outra linha.

Definição 2.3.5. Chamamos de *linha pivô* a linha usada para eliminar os elementos da primeira coluna das demais linhas. O primeiro elemento não nulo da linha pivô é chamado de *pivô*.

Propriedade 2.3.4. Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então A pode ser reduzida à forma triangular superior, usando apenas a operação sobre linhas (iii) e os elementos pivôs serão positivos.

Demonstração. Considere a matriz $A_{n \times n}$ simétrica positiva definida, então da propriedade 2.3.3, temos que, para toda matriz líder A_r , $\det(A_r) > 0$ sendo $1 \leq r \leq n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

note que $a_{11} = \det(A_1) > 0$, assim a_{11} pode ser usado como elemento pivô e a linha 1 é a primeira linha pivô. Considere $a_{22}^{(1)}$ o elemento na posição (2,2) depois que os últimos $n - 1$ elementos da coluna 1 forem eliminados. A submatriz A_2 foi transformada em uma matriz

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

como só usamos a operação de linha (iii), o valor do determinante permanecerá constante, logo

$$\det A_2 = a_{11} a_{22}^{(1)}$$

portanto

$$a_{22}^{(1)} = \frac{\det(A_2)}{a_{11}} = \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)} > 0$$

como $a_{22}^{(1)} \neq 0$, pode ser usados como pivô no segundo processo do escalonamento. A matriz A_3 foi transformada em

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\det(A_3) = \underbrace{a_{11} a_{22}^{(1)}}_{\det A_2} a_{33}^{(2)}$$

$$\det(A_3) = \det(A_2) a_{33}^{(2)}$$

$$a_{33}^{(2)} = \frac{\det(A_3)}{\det(A_2)} > 0$$

como $a_{33}^{(2)} \neq 0$, pode ser usados como pivô no terceiro processo do escalonamento. Para $n = k$, A_k foi transformada em

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2k}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3k}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$\det A_k = \underbrace{a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots}_{\det A_{k-1}} a_{kk}^{(k-1)}$$

$$a_{kk}^{(k-1)} = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} > 0$$

para $n = k + 1$

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2k+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3k+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k+1k+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\det A_{k+1} = \underbrace{a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{kk}^{(k-1)}}_{\det A_k} a_{k+1k+1}^{(k)}$$

$$a_{k+1k+1}^{(k)} = \frac{\det A_{k+1}}{\det A_k} > 0$$

como queria demonstrar. □

Propriedade 2.3.5. *Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então A pode ser fatorada em um produto LDT^T , no qual L é triangular inferior com 1's ao longo da diagonal e D é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são todos positivos.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em (LEON, 2011, p.342) $\square$

Exemplo 2.3.1. *Vamos exemplificar a Propriedade (2.3.5), utilizando a matriz A :*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

A matriz L é determinada da seguinte forma: Na primeira etapa do processo eliminação, multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{2}$ e subtraindo da segunda e multiplicando a primeira linha por $\frac{-1}{2}$ e subtraindo da terceira. Correspondendo a estas operações, podemos definir $l_{21} = \frac{1}{2}$ e $l_{31} = \frac{-1}{2}$. Daí obtemos

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

fazendo $\frac{1}{3}L_2 - L_3 = L_{32}$, temos que $l_{32} = \frac{1}{3}$

$$U = A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

portanto

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

percebe-se que $LU = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Para ver que essa fatoração funciona, vamos ver esse processo em termos de matrizes elementares. A operação sobre linhas (iii) foi aplicada três vezes durante o processo de eliminação. Isto é equivalentemente à multiplicação de A à esquerda por três matrizes elementares E_1 , E_2 e E_3 . Desse modo,

$$E_3 E_2 E_1 A = U$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_U$$

pelo fato das matrizes serem não-singulares, tem-se:

$$A = (E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}) U$$

quando as matrizes elementares inversas são multiplicadas nesta ordem, o resultado é uma matriz L triangular com 1's na diagonal. Os elementos abaixo da diagonal de L serão exatamente os múltiplos que foram subtraídos durante o processo de eliminação:

$$E_3^{-1} E_2^{-1} E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Dada a fatoração LU de uma matriz é possível fatorar também em produto DU_1 , em que D é diagonal de U_1 e triangular superior com o número 1's na diagonal.

$$DU_1 = \begin{bmatrix} U_{11} & & & & \\ & U_{21} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & U_{nn} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{U_{12}}{U_{11}} & \frac{U_{13}}{U_{11}} & \dots & \frac{U_{1n}}{U_{11}} \\ & 1 & \frac{U_{23}}{U_{22}} & \dots & \frac{U_{2n}}{U_{22}} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se que $A = LDU_1$. De forma geral, se A pode ser fatorado em um produto na forma LDU , em que L é triangular inferior, D é diagonal, U é triangular superior, e, L e U têm 1's em sua diagonal, a fatoração é única. Como A é uma matriz simétrica definida positiva, então pode ser fatorada na seguinte forma: $LU = LDU_1$ temos:

$$LDU_1 = A = A^T = (LDU)^T = U_1^T D^T L^T$$

se $L^T = U_1$, temos:

$$A = LDL^T$$

Sendo l uma matriz triangular inferior e D uma matriz diagonal com elementos positivos.

2.3.2 Teste para definida positiva

Da definição (2.3.3), o Teorema (2.3.1) e da Propriedade (2.3.3), pode-se estabelecer os seguintes testes que são condições necessárias, suficientes e equivalentes para que uma matriz $A = A^T$ seja definida positiva.

- i) $x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$.
- ii) O conjunto de todos os autovalores de A são positivos.
- iii) Todas as matrizes líderes possuem determinantes positivos.

Exemplo 2.3.2. Usaremos o Teste (i) para mostrar que A é definida positiva. Seja a matriz simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

tome

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

logo, temos que

$$\begin{aligned} x^T Ax = f(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nós devemos encontrar o ponto crítico de (2.11) e mostrar que ele é ponto de mínimo, para isso, utilizaremos o teste da segunda derivada.

$$\begin{cases} f_{x_1} = 0 \\ f_{x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

daí temos, $P_0 = (0, 0)$. Como o único ponto crítico.

Agora devemos mostrar que o ponto crítico P_0 é o ponto de mínimo, ou seja, é o menor valor que o paraboloide poderá assumir. A matriz Hessiana de f é dada por:

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

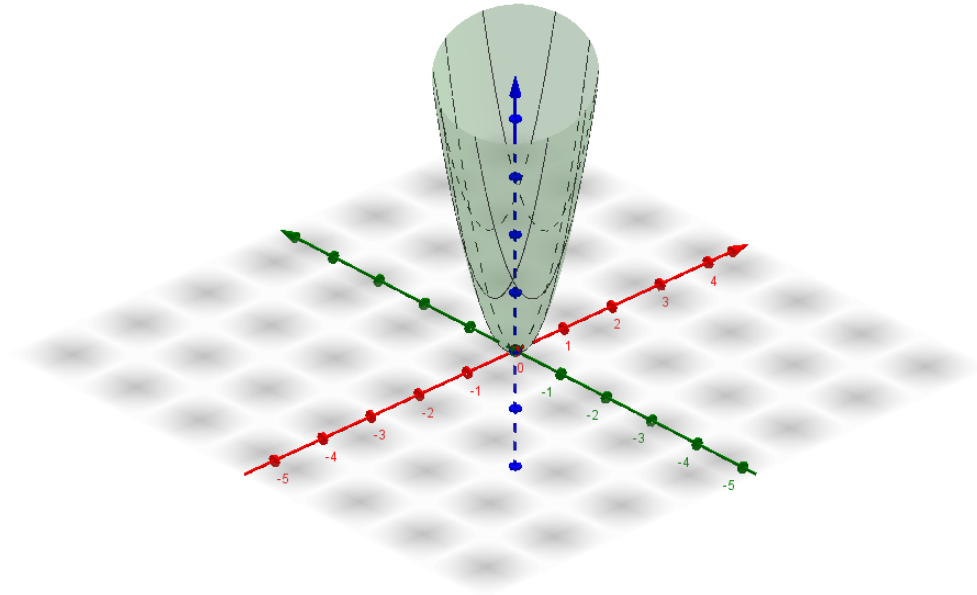
assim,

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det H(x_1, x_2) = 12$$

como $\det H(x_1, x_2) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 > 0$, então $P_0(0,0)$ é ponto de mínimo e, portanto, $f(P_0)$ é o menor valor que a função poderá assumir, logo a matriz A é definida positiva, pois $f(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0,0)$.

O gráfico de f é um paraboloide e pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Gráfico da função $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 2.3.3. Usaremos agora o teste (ii) para mostrar que a matriz A , dada em (2.10), é definida positiva. Para isso, devemos encontrar seus autovalores.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$, ou seja, são maiores que zero e portanto, A é simétrica positiva definida.

Exemplo 2.3.4. Usaremos o teste (iii) para mostra que a matriz A , dada em (2.10) é simétrica positiva definida.

$$\det A_1 = |2| = 2 \tag{2.12}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \tag{2.13}$$

de fato, (2.12) e (2.13) possuem determinantes positivos. Logo, a matriz A , dada em 2.10, é definida positiva.

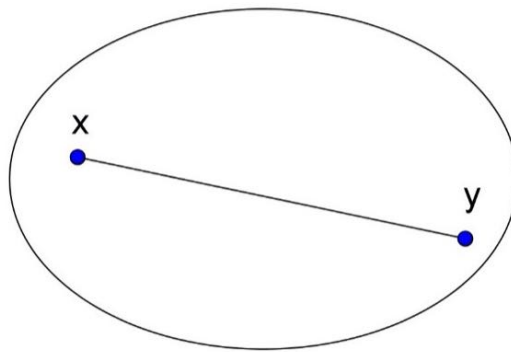
3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS VIA LMIs

Este capítulo abordará a definição de convexidade, estabilidade de sistemas lineares e condições para a estabilidade de sistemas lineares, baseados em LMIs.

3.1 Convexidade

Definição 3.1.1. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de conjunto convexo se dado dois pontos $x_1, x_2 \in X$ o ponto genérico (ou segmento) $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ para cada $\lambda \in [0, 1]$.*

Figura 2 – Conjunto Convexo, considerando $x = x_1$ e $y = x_2$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 3.1.1. *O conjunto $X = \{x : Ax = b\}$, sendo A uma matriz $m \times n$ e b um vetor de dimensão m , é um conjunto convexo.*

De fato, sejam $x_1, x_2 \in X$. Devemos mostrar que

$$x' = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X, \text{ ou seja, } Ax' = b.$$

como $x_1, x_2 \in X, Ax_1 = b$ e $Ax_2 = b$, daí

$$\lambda Ax_1 = \lambda b \tag{3.1}$$

$$(1 - \lambda)Ax_2 = (1 - \lambda)b \tag{3.2}$$

somando (3.1) com (3.2), temos

$$\lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b + (1 - \lambda)b$$

assim,

$$A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = b.$$

Portanto

$$x' = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X.$$

A combinação convexa pode ser generalizada para n pontos em X

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \alpha_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (3.3)$$

ou seja, qualquer ponto da forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, sendo que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \geq 0 \quad (3.4)$$

é uma combinação convexa dos pontos $x_1 \dots x_n$

Observação 3.1.1. *É comum na literatura referir-se às expressões dada em (3.4) como simplex unitário .*

Definição 3.1.2. *Um ponto $x_i \in X$ é chamado de vértice se esse ponto não pode ser escrito como combinação linear de quaisquer outros dois pontos distintos de X . Isto é, se $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ com $\lambda \in [0, 1]$ e $x_1, x_2 \in X \Rightarrow x_1 = x_2 = x$, então x é um vértice.*

Definição 3.1.3. *Um semi-espaco é uma coleção de pontos descrito na forma: $H^+ = \{x : px \geq k\}$ ou $H^- = \{x : px \leq k\}$, com $p \in \mathbb{R}^n$ e k um escalar.*

Definição 3.1.4. *Um conjunto poliedral é a interseção de um número finito de semi-espacos. Os conjuntos poliedrais são convexos e fechados, mas podem não ser limitado.*

Definição 3.1.5. *Um conjunto poliedral limitado é denominado politopo. São regiões geométricas contido no $\mathbb{R}^n$ definidos como uma generalização dos conceitos de polígono e poliedros.*

3.1.1 Politopos convexos

Podemos conceituar um politopo convexo como um caso particular de um politopo com propriedades adicionais.

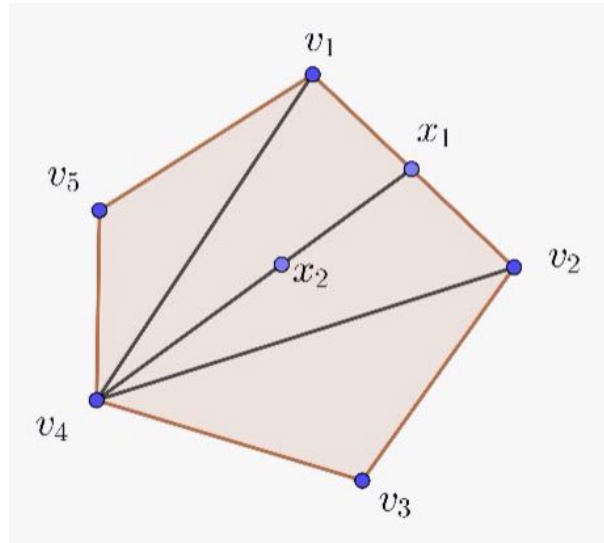
Definição 3.1.6. *X é um politopo convexo contido no $\mathbb{R}^n$, se somente se, $\forall x, y \in X$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$.*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$$

Observação 3.1.2. Note que todo politopo é um conjunto convexo, porém a recíproca dessa afirmação não é válida. Por exemplo, no plano, um círculo é um conjunto convexo, porém não é um politopo.

Exemplo 3.1.2. Seja X um politopo cujos vértices são $\{v_1, v_2, \dots, v_5\}$, ilustrados na Figura 3. .

Figura 3 – Politopo convexo



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Todo $x \in X$ é escrito da forma: $x = \sum_{i=1}^5 \alpha_i v_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^5 \alpha_i = 1$. Por exemplo:

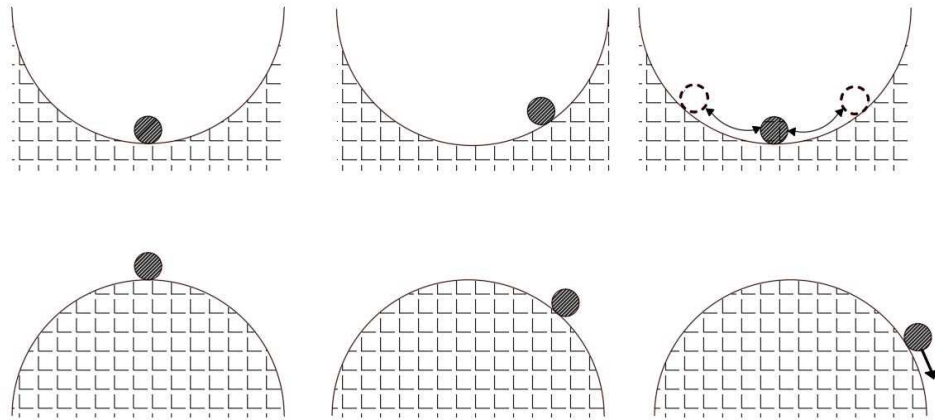
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + 0v_3 + 0v_4 + 0v_5 \\ x_2 &= \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + 0v_3 + \frac{1}{3}v_4 + 0v_5 \\ x_2 &= \frac{1}{3}v_4 + \frac{2}{3}x_1 \end{aligned}$$

3.2 Estabilidade Quadrática

A estabilidade de um ponto de equilíbrio é usualmente caracterizada de Teoria de Lyapunov para sistemas. Uma das condições fundamentais na teoria de controle baseado em LMIs é a construção de funções de Lyapunov, tanto para análise de estabilidade quanto para a síntese do estudo de controladores.

Intuitivamente, a estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com a função energia deste sistema. Se a função energia do sistema é sempre não negativa e decresce com relação ao tempo, as trajetórias tendem à origem (KHALIL, 1996).

Figura 4 – Comportamento estável e instável, mecanicamente, no sentido de Lyapunov.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Considere o sistema linear autônomo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.5)$$

O ponto de equilíbrio do sistema (3.5) é um ponto x_e tal que $\dot{x} = 0$.

Note que, no caso do sistema linear (3.5), $x_e = 0$.

Definição 3.2.1. Dizemos que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (3.5), é estável no sentido de Lyapunov se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para toda condição inicial $x_0 = x(0)$

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon. \quad (3.6)$$

A Figura 4, parte superior, ilustra o comportamento de uma função estável no sentido de Lyapunov.

Observação 3.2.1. Se o ponto de equilíbrio não é estável dizemos que ele é instável. A Figura 4, parte inferior, ilustra o comportamento de um ponto de equilíbrio instável.

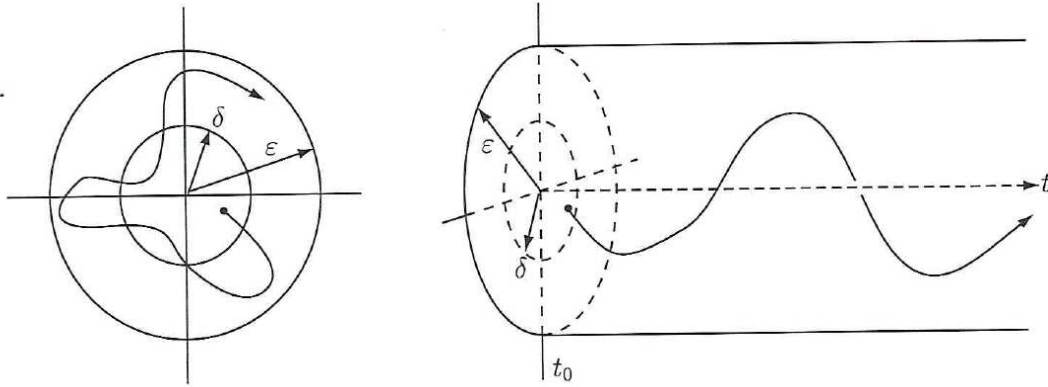
Em termos mecânicos, pode-se dizer que um objeto está em equilíbrio estável se, quando empurrado, ele retorna ao seu ponto inicial depois de suspender o impulso, como pode ser visto na parte superior da Figura 4. Percebe-se que o objeto da parte inferior da Figura 4, não retorna ao seu ponto inicial, caracterizando um sistema instável.

Definição 3.2.2. Nós dizemos que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (3.5), é assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se ele for estável e existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e. \quad (3.7)$$

A Figura 5 ilustra o comportamento da solução de um sistema assintoticamente estável.

Figura 5 – Comportamento da solução de um sistema assintoticamente estável.



Fonte: (HADDAD; CHELLABOINA, 2008, p.137)

Definição 3.2.3. Dizemos que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (3.5), é globalmente assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se ele for estável e, além disso, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ temos $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.

Nesse trabalho, por se tratar de sistemas lineares teremos apenas um ponto de equilíbrio que é a origem e, neste caso, se ela for estável será um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, uma vez que todas as trajetórias convergirão para a origem, independentemente da condição inicial.

Definição 3.2.4 (Função de Lyapunov). Seja $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Dizemos que V é uma função de Lyapunov se:

- i) $V(0) = 0$;
- ii) $V(x) > 0, \forall x \in D, x \neq 0$;
- iii) $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D, x \neq 0$.

Teorema 3.2.1 (Lyapunov). Dizemos que o ponto de equilíbrio $x_e = 0$ do sistema (3.5) ($\dot{x} = Ax$) é globalmente assintoticamente estável, se existe uma função $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (função de Lyapunov) tal que:

- i) $V(0) = 0$;
- ii) $V(x) > 0, \forall x \in D, x \neq 0$;
- iii) $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D, x \neq 0$.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser visto em (HADDAD; CHELLA-BOINA, 2008, p.138). $\square$

Fazendo uma análise mais genérica, a teoria de Lyapunov garante que, para sistemas invariantes no tempo, o ponto de equilíbrio é estável se existe uma função escalar $V(x)$ tal que:

- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Uma forma simples de encontrar a função de Lyapunov é considerar a forma quadrática

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (3.8)$$

sendo P uma matriz simétrica positiva definida, ou seja,

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A condição $V(x) = x^T P x > 0$ para todo $x \neq 0$, é equivalente a determinarmos uma matriz $P = P^T \succ 0$. Se existir essa matriz P podemos dizer que o sistema dinâmico é quadraticamente estável e que $V(x)$ é função de *Lyapunov* quadrática.

Exemplo 3.2.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1; \\ \dot{x}_2 = -x_2; \end{cases} \quad (3.10)$$

e a função $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, sendo $x = [x_1 \ x_2]^T$. Vamos mostrar que V é uma função de *Lyapunov* e que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Notemos que $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, se $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $V(x) < 0 \quad \forall x \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Agora basta verificar se $\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{aligned} V(x) &= x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_1) + 2x_2(-x_2) \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2) < 0 \quad \forall x \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Teorema 3.2.2. *Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x=0$, do sistema (3.5), seja assintoticamente estável é que exista uma matriz P , simétrica positiva definida ($P \succ 0$), tal que:*

$$A^T P + P A \prec 0. \quad (3.11)$$

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, sendo P uma matriz simétrica definida positiva.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + P A) x \end{aligned}$$

Para que $\dot{V} < 0$, $\forall x \neq 0$, devemos impor que $x^T (A^T P + P A) x < 0$, isto é, $A^T P + P A \prec 0$. $\square$

3.3 Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs

A equação (3.11) é uma LMI que no Brasil convencionou-se por chamar de Desigualdade Matricial Linear. As LMIs são ferramentas matemáticas amplamente utilizadas na procura de soluções para os mais diversos problemas de otimização, controle de sistemas e, recentemente, identificação de sistemas. Durante os últimos 20 anos foram desenvolvidos algoritmos eficientes que tornaram possível, de forma confiável, a solução das LMIs, são os algoritmos do ponto interior. Esses algoritmos exploram a convexidade dos problemas dados por LMIs para obter resultados numéricos confiáveis. A partir de então, muitos dos resultados usuais da teoria de controle e sistemas estão sendo reescritos como LMIs.

Nesta seção, apresentaremos o conceito de desigualdades matriciais lineares e outros conceitos básicos relacionados.

Definição 3.3.1. *Uma Desigualdade Matricial Linear - LMI é uma expressão da forma:*

$$F(x) \equiv F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i \succ 0 \quad (3.12)$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o vetor de variáveis de decisão; $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, n$, são matrizes constantes simétricas, ou seja, $F_i = F_i^T$.

Note que $F(x) > 0$ significa que $F(x)$ deve ser definida positiva para todo x , ou seja, $y^T F(x) y > 0$ para todo vetor $y \neq 0$. A LMI (3.12) é equivalente a um conjunto de n

desigualdades polinomiais em x , obtidas impondo-se que os menores líderes principais de $F(x)$ devem ser todos positivos. A LMI (3.12) é uma restrição convexa, isto é, o conjunto

$$\{x : F(x) \succ 0\}$$

é um conjunto convexo.

Exemplo 3.3.1. *Seja a LMI*

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \text{ com } x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

da definição 3.12, $F(x)$ pode ser escrito da seguinte forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^2 x_i F_i = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 \succ 0 \quad (3.14)$$

ou seja,

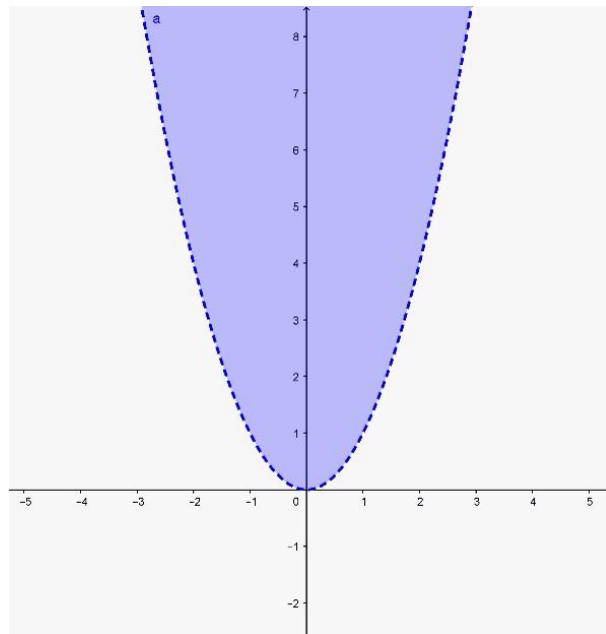
$$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.15)$$

Afirmar que $F(x) \succ 0$, pela Propriedade 2.3.3, é equivalente dizer que

$$\begin{aligned} \det F_1(x) &= x_2 > 0 \\ \det F(x) &= x_2 - x_1^2 > 0 \end{aligned}$$

que é um conjunto convexo, ou seja, um restrição convexa, como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Exemplo de LMI



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A desigualdade (3.12) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x , tais como desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades de norma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle, como desigualdade de Lyapunov e outras desigualdades matriciais.

Um exemplo de LMI com variável matricial é a desigualdade de Lyapunov dado em (3.11):

$$A^T P + P A \prec 0$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz conhecida e $P = P^T$ a variável, tal que $P \succ 0$.

Nem todo resultado da teoria de controle aparece diretamente na forma de LMI, como a equação de Lyapunov. Mas algumas ferramentas da álgebra matricial ajudam a transpor estes resultados para uma formulação de desigualdades matriciais lineares.

3.3.1 Estabilidade de sistemas lineares com realimentação dos estados

Considere um sistema linear invariante no tempo descrito na forma de espaço estado,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.16)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada do sistema. Agora iremos assumir que todos os estados estejam disponíveis para realimentação, daí teremos a lei de realimentação dos mesmos que será dada por:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (3.17)$$

sendo K uma matriz controladora de elementos constantes com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Substituindo (3.17) em (3.16), temos o seguinte sistema com característica de realimentação de estado.

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.18)$$

Teorema 3.3.1. *Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x = 0$, do sistema realimentado (3.18), seja assintoticamente estável é que exista uma matriz P , simétrica positiva definida, tal que:*

$$XA^T + AX - BG - G^T B^T \prec 0 \quad (3.19)$$

$$X \succ 0 \quad (3.20)$$

se as LMIs (3.19) e (3.20) forem factíveis o ganho do controlador é dado por $K = GX^{-1}$

Demonstração. Considere uma função de Lyapunov quadrática $V(x) = x^T Px$. Sendo P uma matriz simétrica positiva definida, assim de (3.18) nota-se que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \\ &= [(A - BK)x]^T Px + x^T P[(A - BK)x] \\ &= x^T (A - BK)^T Px + x^T P(A - BK)x \\ &= x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)]x\end{aligned}\quad (3.21)$$

Para que $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$, devemos impor que $x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)]x$, isto é

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) \prec 0 \quad (3.22)$$

$$P \succ 0 \quad (3.23)$$

Definindo $X = P^{-1}$ e $G = KX$, pré e pós multiplicando as desigualdades (3.22) e (3.23) por X , temos

$$XA^T + AX - BG - G^T B^T \prec 0 \quad (3.24)$$

$$X \succ 0 \quad (3.25)$$

Se as desigualdade (3.24) e (3.25) forem factíveis, pode-se projetar uma matriz K de realimentação de espaço estado que irá estabilizar todo sistema, dado por:

$$K = GX^{-1} \quad (3.26)$$

□

3.3.2 Taxa de decaimento para sistema com realimentação de estado

Um índice de desempenho que devemos considerar de um sistema controlado é a velocidade de resposta que o sistema irá oferecer, essa resposta está associada com a taxa de decaimento α .

Levando em consideração o sistema realimentado (3.18), a taxa de decaimento ou (maior expoente de Lyapunov) é definida em (BOYD *et al.*, 1994, p.66) como sendo a maior constante positiva α , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0 \quad (3.27)$$

vale para todas as trajetórias $x(t)$, $t > 0$.

Podemos utilizar a função quadrática de Lyapunov (3.8) para estabelecer um limite inferior sobre a taxa de decaimento de (3.18).

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t)) \quad (3.28)$$

para todas as trajetórias.

Teorema 3.3.2. *O sistema linear realimentado (3.18) é quadraticamente estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual a α se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que, as seguintes LMIs são factíveis.*

$$XA^T + AX - BG - G^T B^T + 2\alpha X \prec 0 \quad (3.29)$$

$$X \succ 0 \quad (3.30)$$

se as LMIs (3.29) e (3.30) forem factíveis o ganho do controlador é dado por $K = GX^{-1}$

Demonstração. Considere uma função de Lyapunov quadrática $V(x) = x^T Px$. Sendo P uma matriz simétrica positiva definida. De (3.28), temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + 2\alpha V &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} + 2\alpha V \\ &= [(A - BK)x]^T Px + x^T P[(A - BK)x] + 2\alpha x^T Px \\ &= x^T (A - BK)^T Px + x^T P(A - BK)x + 2\alpha x^T Px \\ &= x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK) + 2\alpha P]x \leq 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

então

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + 2\alpha P \prec 0 \quad (3.32)$$

$$P \succ 0 \quad (3.33)$$

Definindo $X = P^{-1}$ e $G = KX$, pré e pós multiplicando as desigualdades (3.32) e (3.33), temos teremos as seguintes LMIs:

$$XA^T + AX - BG - G^T B^T + 2\alpha X \prec 0 \quad (3.34)$$

$$X \succ 0 \quad (3.35)$$

Se as LMIs (3.34) e (3.35) são factíveis, um controlador pode ser projetado que irá estabilizar o sistema realimentado e esse controlador é dado por

$$K = GX^{-1} \quad (3.36)$$

□

3.3.3 Estabilidade de sistemas lineares com incertezas politópicas

Considere o sistema linear com incertezas politópicas

$$\dot{x} = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (3.37)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada do controle, $A(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$, $B(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i$, matrizes que representam a dinâmica do sistema, com $0 \leq \alpha_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\mathbb{K}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i \in \mathbb{K}_n$.

O número de vértices do politopo de incertezas é dado por $n = 2^r$, sendo r o número de componente incertas das matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$. As matrizes A_i e B_i representam os vértices do politopo de incertezas.

Considerando que todas as variáveis de estado esteja aptas para a realimentação, a lei de controle para realimentação de sistemas incertos será dada por (3.17).

Substituindo (3.17) em (3.37), obtém-se um sistema realimentado

$$\dot{x} = A(\alpha)x(t) - B(\alpha)Kx(t) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)x = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - B_i K)x \quad (3.38)$$

Teorema 3.3.3. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear com incertezas politópicas dado em (3.38) é globalmente assintoticamente estável, se existem uma matriz simétrica positiva definida X e uma matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_n$.*

$$XA_i^T + A_i X - B_i G - G^T B_i^T \prec 0 \quad (3.39)$$

Se (3.39) são factíveis, para $i \in \mathbb{K}_n$, o ganho do controlador é dado por $K = GX^{-1}$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V = x^T P x$. Assim, de (3.38) nota-se que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - B_i K)x \right]^T P x + x^T P \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - B_i K)x \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x^T (A_i - B_i K)^T P x + x^T P \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - B_i K)x \\ &= x^T \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - B_i K)^T P + P \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - B_i K) \right] x \\ &= x^T \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \left[(A_i - B_i K)^T P + P (A_i - B_i K) \right] \right] x \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_n$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, então de (3.40), $\dot{V} < 0 \forall x \neq 0$, se

$$(A_i - B_i K)^T P + P (A_i - B_i K) \prec 0 \quad (3.41)$$

Definindo $X = P^{-1}$ e $G = KX$, pré e pós multiplicando as desigualdades (3.41) por X , concluímos a demonstração, pois obtemos

$$XA_i^T + A_iX - B_iG - G^TB_i^T \prec 0. \quad (3.42)$$

□

Teorema 3.3.4 (Boyd *et al.* (1994)). *O sistema linear com incertezas politópicas dado em (3.38) é quadraticamente estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual α se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida X e $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_n$, as seguintes LMIs são factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iG - G^TB_i^T + 2\alpha X \prec 0. \quad (3.43)$$

Se (3.43) são factíveis, para $i \in \mathbb{K}_n$, o ganho do controlador é dado por $K = GX^{-1}$.

Demonstração. É similar à prova do Teorema 3.3.2, considerando $\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t))$.

□

4 APLICAÇÃO

Neste capítulo vamos utilizar o pêndulo invertido para ilustrar as metodologias de projetos de controle, de sistemas lineares invariantes no tempo, apresentados no capítulo 3.

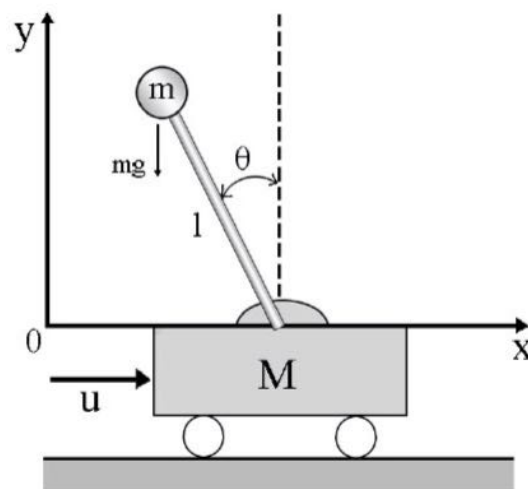
Devido a instabilidade natural do pêndulo há um grande ramo de pesquisa relacionado a ele. Este sistema tem sido utilizado como referência no estudo de sistemas de controle, devido a complexidade de suas características. Iremos apresentar o modelo matemático do pêndulo, e a partir dele, realizar simulações utilizando o *software* Matlab. Este capítulo segue a linha de (RIBEIRO, 2006).

4.1 Pêndulo invertido

O pêndulo invertido é um modelo clássico de engenharia que aborda a teoria do controle e integra os conhecimentos de Elétrica, Matemática, Eletrônica e Mecânica.

O pêndulo invertido consiste em uma haste fixa a um carrinho, sendo ela com possibilidade de movimento angular, como pode ser visto na Figura 7. A haste tenta cair sobre o efeito da gravidade, portanto é um sistema naturalmente instável. O sistema pode ser estabilizado aplicando uma força horizontal no carrinho, fazendo a haste encontrar seu ponto de equilíbrio, assim ficando na vertical. O sistema admite como entrada a força u usada para movimentar o carrinho horizontalmente e, como saída, a posição angular do pêndulo θ e a posição horizontal do carrinho x .

Figura 7 – Pêndulo invertido



Fonte: (RIBEIRO, 2006, p.71).

As equações do movimento do pêndulo são dadas por

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = u \quad (4.1)$$

$$ml\cos\theta\ddot{x} - ml\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \quad (4.2)$$

$$u = av - b\dot{x} \quad (4.3)$$

Os valores numéricos de a e b e os demais parâmetros são descritos na tabela.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros do pêndulo invertido.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Centro de gravidade a haste	l	0,305	m
Massa da haste	m	0,21	kg
Massa do carro	M	0,4573	kg
Aceleração da gravidade	g	9,81	m/s^2
Dados de placa	a	1,7378	-
Dados de placa	b	7,6832	-

Das equações (4.1) e (4.2), tem-se

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - u\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \\ \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta\cos\theta - m\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta\cos\theta + u}{M+m\sin^2\theta} \end{cases} \quad (4.4)$$

substituindo o valor de u , tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - (av - b\dot{x})\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \\ \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta\cos\theta - m\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta\cos\theta + av - b\dot{x}}{M+m\sin^2\theta} \end{cases} \quad (4.5)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta + b\dot{x}\cos\theta - av\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \\ \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{ml\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta\cos\theta - m\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta\cos\theta - b\dot{x} + av}{M+m\sin^2\theta} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{(M+m)g\sin\theta - m(\sin\theta)(\dot{\theta})^2\cos\theta + b\dot{x}\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \\ \dot{x} \\ \frac{ml(\dot{\theta})^2 - m\frac{g\sin\theta - b\dot{x}}{(M+m\sin^2\theta)}}{(M+m\sin^2\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \\ 0 \\ \frac{a}{(M+m\sin^2\theta)} \end{bmatrix} v \quad (4.7)$$

após a linearização do sistema próximo ao ponto de equilíbrio $\begin{bmatrix} \dot{\theta} & \ddot{\theta} & \dot{x} & \ddot{x} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)}{Ml}g & 0 & 0 & \frac{b}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m}{M}g & 0 & 0 & \frac{-b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{Ml} \\ 0 \\ \frac{a}{M} \end{bmatrix} v. \quad (4.8)$$

4.2 Simulações

O objetivo da simulação numérica do sistema de controle é fazer com que a haste do pêndulo invertido permaneça em “pé”. Vamos dividir as simulações em quatro casos. Caso 1: Estabilidade; Caso 2: Estabilidade com taxa de decaimento; Caso 3: Estabilidade com incertezas e Caso 4: Estabilidade sistemas incerto com taxa de decaimento.

Considerou-se a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ e o ponto de equilíbrio $x_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. As simulações computacionais foram realizadas utilizando a linguagem do YALMIP (LOFBERG, 2004), com o solver LMILAB (GAHINET *et al.*, 1995).

Para interpretação dos resultados expressos nas Figuras 8, 9, 10 e 11, geramos três gráficos em cada uma das figura. O primeiro gráfico representa a posição x do carrinho, no qual a haste do pêndulo está fixa, em função do tempo, o segundo gráfico representa a posição angular θ da haste em função do tempo e o terceiro gráfico representa o sinal de controle em função do tempo.

4.2.1 Caso 1: Estabilidade

Considerando o sistema (4.8) com os valores dos parâmetros dados na Tabela 1, temos as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 46,9342 & 0 & 0 & 55,0860 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -4,5049 & 0 & 0 & -16,8012 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ -12,4594 \\ 0 \\ 3,8001 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

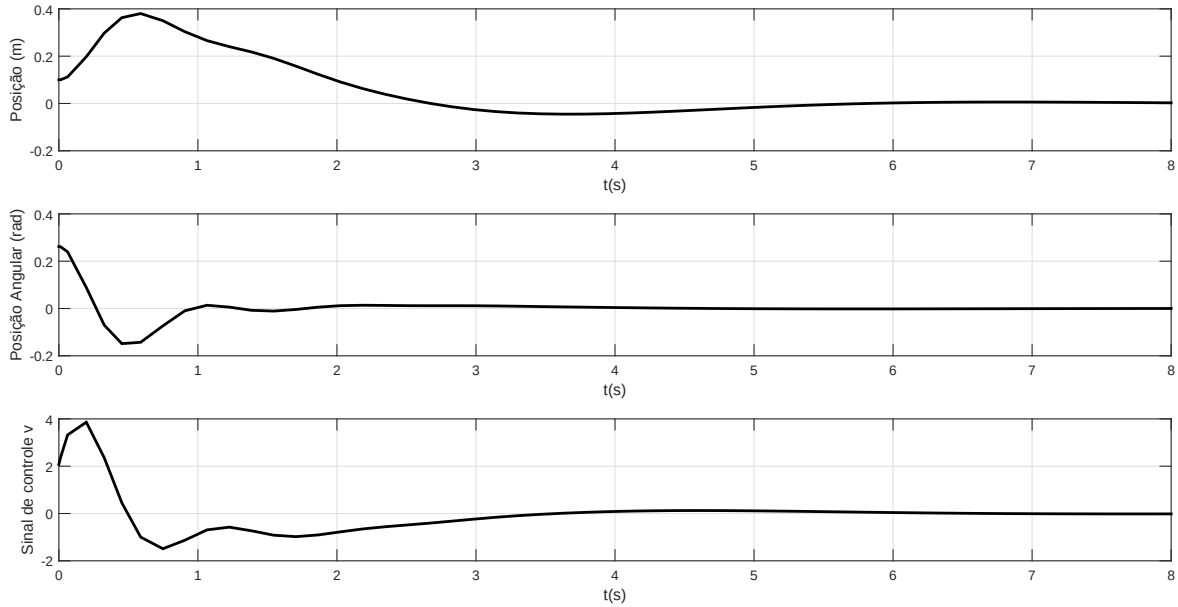
Considerando as matrizes A e B , dada em (4.9) e utilizando as LMIs (3.19) e (3.20) do Teorema 3.3.1 foram obtidas a matriz simétrica definida positiva P e o ganho do controlador K

$$P = \begin{bmatrix} 6,8740 & 1,1218 & 1,0013 & 1,0458 \\ 1,1218 & 0,3610 & 0,1919 & 0,2998 \\ 1,0013 & 0,1919 & 0,3737 & 0,4108 \\ 1,0458 & 0,2998 & 0,2146 & 0,4108 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

$$K = \begin{bmatrix} -7,7593 & -0,6092 & -0,4687 & -4,8970 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

A resposta da simulação do sistema controlado pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Estabilidade.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Da Figura 8, pode-se notar que para a estabilização do pêndulo invertido foi necessário aproximadamente 7 segundos e exigiu pouco esforço do controlador, visto que o sinal de controle não ultrapassou 4 Volts.

4.2.2 Caso 2: Estabilidade com taxa de decaimento $\alpha = 2$

Considerando o sistema (4.8) com os valores dos parâmetros dados na Tabela 1, temos as matrizes A e B , dada em (4.9).

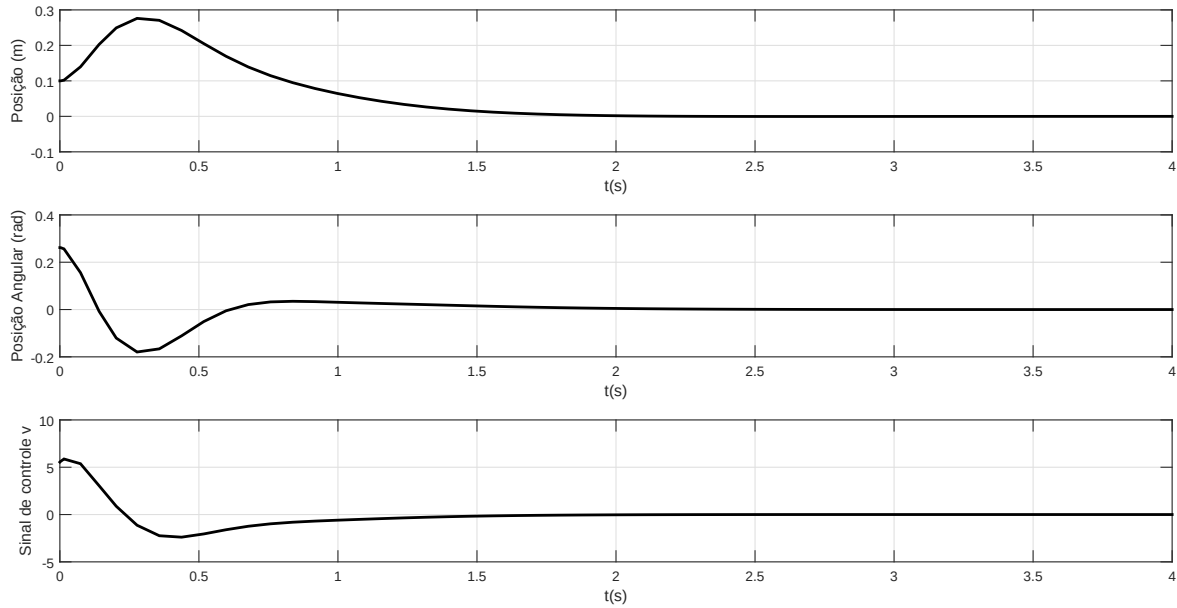
Utilizando as LMIs (3.29) e (3.30) do Teorema 3.3.2 e uma taxa de decaimento $\alpha = 2$, foram obtidas a matriz simétrica definida positiva P e o ganho do controlador K

$$P = \begin{bmatrix} 115,0570 & 20,2819 & 56,7956 & 40,2454 \\ 20,2819 & 3,7544 & 9,9802 & 7,1178 \\ 56,7956 & 9,9802 & 34,0739 & 21,7250 \\ 40,2454 & 7,1178 & 21,7250 & 14,8944 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

$$K = \begin{bmatrix} -18,7717 & -2,8108 & -6,2777 & -9,1981 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

A resposta da simulação do sistema controlado pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Estabilidade com taxa de decaimento $\alpha = 2$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O Resultado expresso na Figura 9, descreve a estabilidade do pêndulo com taxa de decaimento $\alpha = 2$ que, neste caso, a performance do controlador foi melhorada, pois estabilizou o pêndulo invertido em aproximadamente 2 segundos. Entretanto houve um aumento no sinal de controle, elevando-se há mais de 6 Volts, assim exigindo mais do motor do pêndulo. De um forma geral, percebe-se que houve uma melhora significativa na resposta transitória do sistema e sem exigir muito esforço de tensão a mais que o caso anterior, onde não foi considerado taxa de decaimento.

4.2.3 Caso 3: Estabilidade de sistemas com incertezas

Neste caso, vamos admitir que o sistema tem uma incerteza na planta. Vamos considerar que a haste não seja homogênea de modo que o seu centro de gravidade seja incerto. Assim, vamos supor que o centro de gravidade esteja entre 0,29m a 0,31m. Logo l é um parâmetro incerto e este parâmetro afeta varias componentes das matrizes A e B , dadas em (4.8), no entanto, as componentes não são distintas, pois são da formula $w \frac{1}{l}$, $w \in \mathbb{R}$. Assim, temos um politopo de $2^1 = 2$ vértices, sendo um vértice A_1, B_1 , considerando o valor mínimo $l_- = 0,29\text{m}$ e o outro A_2, B_2 , considerando o valor valor máximo $l_+ = 0,31\text{m}$.

Para a simulação a seguir foi considerado, como nos caso anteriores, $l = 0,305\text{m}$.

Considerando os valores dos parâmetros dados na Tabela 1, com $l_- = 0,29\text{m}$ e $l_+ = 0,31\text{m}$ temos as seguintes vértice do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 49,3618 & 0 & 0 & 57,9353 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -4,5049 & 0 & 0 & -16,8012 \end{bmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -13,1039 \\ 0 \\ 3,8001 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 46,1772 & 0 & 0 & 54,1975 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -4,5049 & 0 & 0 & -16,8012 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -12,2585 \\ 0 \\ 3,8001 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Considerando as matrizes A_1 , B_1 , A_2 e B_2 , dada em (4.14) e (4.15) e utilizando as LMIs (3.39) do Teorema 3.3.3 foram obtidas a matriz simétrica definida positiva P e o ganho do controlador K

$$P = \begin{bmatrix} 6,0605 & 0,9755 & 0,8882 & 0,9237 \\ 0,9755 & 0,3233 & 0,1697 & 0,2706 \\ 0,8882 & 0,1697 & 0,3466 & 0,1937 \\ 0,9237 & 0,2706 & 0,1937 & 0,3799 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

$$K = \begin{bmatrix} -7,3738 & -0,5395 & -0,4204 & -4,8448 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

A resposta da simulação do sistema controlado pode ser visto na Figura 10.

O resultado do terceiro caso, expresso na Figura 10, descreve a estabilidade do pêndulo com incertezas politópicas, sendo essas incertezas pertencentes ao intervalo $[l_-, l_+]$. A Figura 10 mostra a eficiência do controlador que estabiliza o sistema em aproximadamente 7 segundos, consumindo aproximadamente 4 Volts.

4.2.4 Caso 4: Estabilidade de sistemas incertos com taxa de decaimento

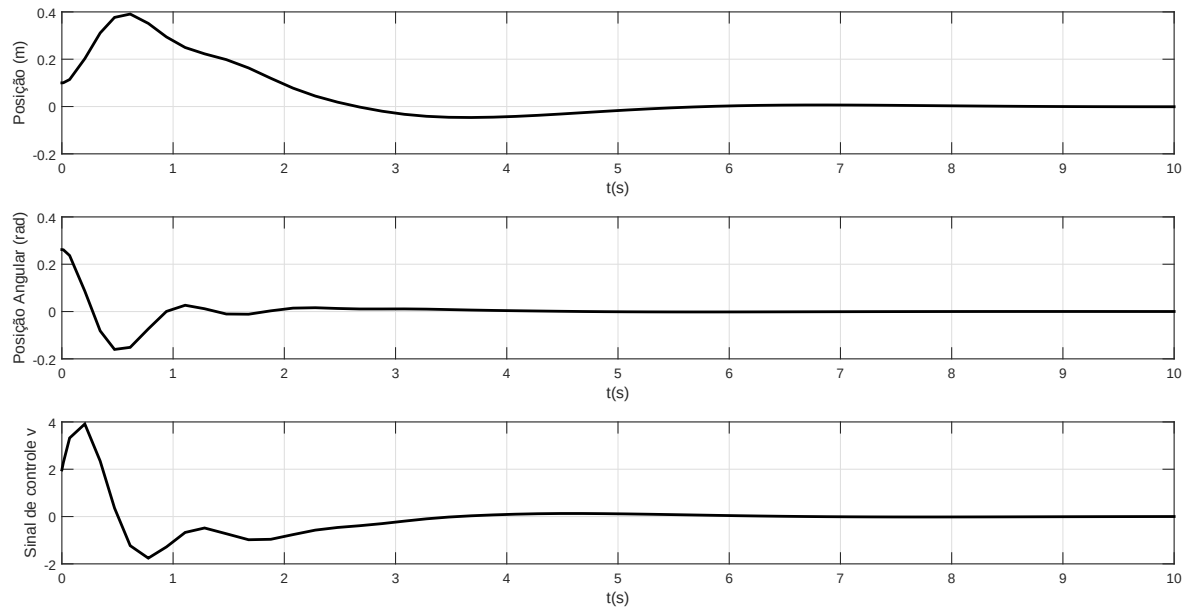
$$\alpha = 2$$

Considerando uma taxa de decaimento $\alpha = 2$ e as matrizes A_1 , B_1 , A_2 , e B_2 , dada em (4.14) e (4.15). Utilizando as LMIs (3.43) do Teorema 3.3.4 foram obtidas a matriz simétrica definida positiva P e o ganho do controlador K

$$P = \begin{bmatrix} 107,9595 & 18,6145 & 53,7599 & 38,0441 \\ 18,6145 & 3,3832 & 9,2295 & 6,5778 \\ 53,7599 & 9,2295 & 32,7260 & 20,7865 \\ 38,0441 & 6,5778 & 20,7865 & 14,2167 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

$$K = \begin{bmatrix} -17,7383 & -2,5689 & -5,8811 & -8,8922 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

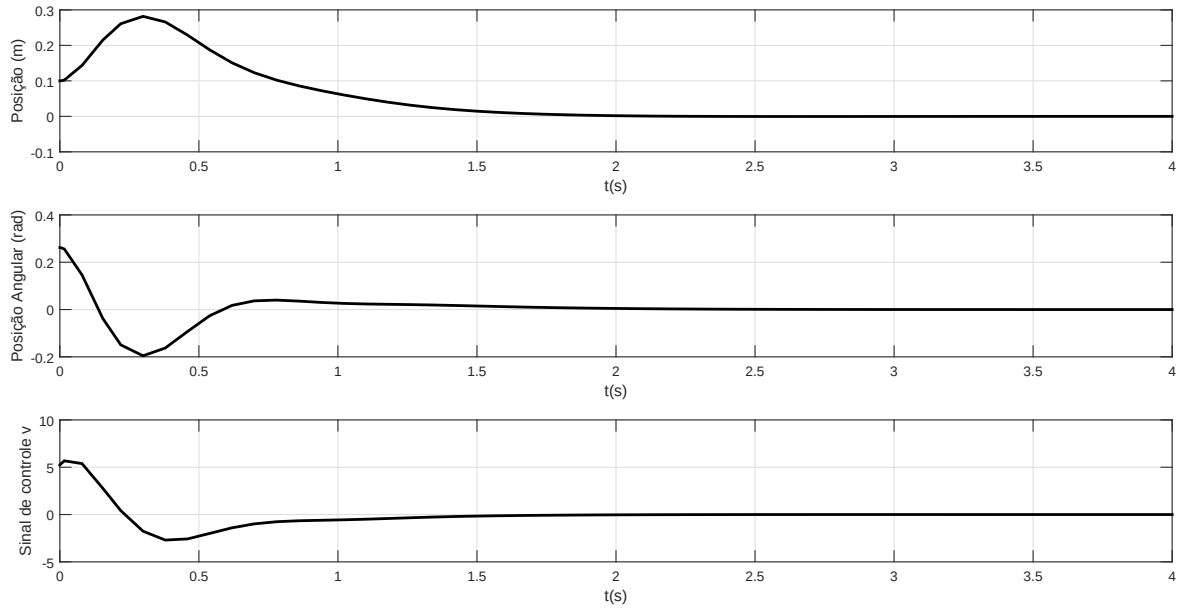
Figura 10 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Sistema incerto.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A resposta da simulação do sistema controlado pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$ - Sistema incerto com taxa de decaimento $\alpha = 2$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Da Figura 11, pode-se notar que o sistema, pêndulo invertido, foi estabilizado em aproximadamente 2 segundos, e exigiu um esforço de tensão no motor de pouco mais de 5 Volts.

Observando as Figuras 9 e 11, nota-se que mesmo considerando incerteza na planta o controlador obteve bom desempenho, pois exigiu praticamente o mesmo esforço de tensão do controlador sem incerteza.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados tópicos da matemática que fundamentam a teoria de controle de sistemas lineares, com análise e projeto baseados em LMIs. Os resultados das metodologias estudadas asseguram a estabilidade do sistema controlado, com garantia de taxa de decaimento, mesmo com incertezas na planta. Nos métodos estudados as LMIs utilizadas para encontrar os ganhos são as clássicas que usa apenas um ganho de realimentação de vetor de estado.

Inicialmente, no capítulo 2, foi realizado um estudo de resultados preliminares de álgebra linear que são importantes para o fundamentar a análise e síntese de controle de sistemas lineares, baseados em LMIs.

Em seguida, no capítulo 3, foram estudados os conceitos de convexidade, estabilidade e foi definido LMIs. Além disto, foram estabelecidos condições, baseados em LMIs, para projeto de controladores de sistemas lineares incertos.

Por fim, no capítulo 4, foram apresentados exemplos de simulações numéricas para ilustrar a metodologia proposta. Os resultados obtidos nas Figuras 8 a 11 confirmam a eficiência da metodologia proposta, visto que, em todo caso, o sistema apresenta resposta transitória apropriada.

Das Figuras 9 e 11 percebe-se a importância da utilização da taxa de decaimento para a melhoria do desempenho do sistema, visto que, com a inclusão da mesma reduz significativamente o transitório. Além disso, não houve muito aumento no sinal de controle, quando comparado com os casos que não utilizou taxa de decaimento.

A metodologia estudada neste trabalho pode ser melhorado, por exemplo, inserido índices de desempenho como: restrição na entrada e saída de planta, os critérios de desempenhos H_2 e H_∞ . Além disso, os resultados podem ser generalizados para sistemas não lineares utilizando modelagem Fuzzy.

Referências

- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989. Citado na página 12.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15). Citado 3 vezes nas páginas 12, 40 e 43.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; AO, E. A.; COVACIC, M. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009. Citado na página 13.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI Control Toolbox**: for use with Matlab. Natick: The Math Works, Inc., 1995. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 46.
- HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. **Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach**. New York: Princeton University Press, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- KHALIL, H. K. Nonlinear systems. **Prentice-Hall, New Jersey**, v. 2, n. 5, 1996. Citado na página 33.
- LEON, S. J. **Linear álgebra e aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 18, 22, 23 e 26.
- LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. **Proceedings...** Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 46.
- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. LMI approach for $\mathcal{H}_\infty$ linear parameter-varying state feedback control. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, New York, v. 152, n. 2, p. 195–201, mar. 2005. Citado na página 13.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M. Stability analysis of linear time-varying systems: Improving conditions by adding more information about parameter variation. **Systems & Control Letters**, Elsevier, v. 60, n. 5, p. 338–343, 2011. Citado na página 13.
- RAMOS, D. C.; PERES, P. L. D. An lmi condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 47, n. 4, p. 675–678, 2002. Citado na página 13.
- RIBEIRO, J. M. d. S. **Controle discreto com modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no sinal de controle**. 2006. 126 f. Tese (Doutorado em Engenharia

Elétrica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006. Citado na página 44.

SILVA, J. H. P.; JÚNIOR, E. M.; SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R. Controle $\mathcal{H}_\infty$ com chaveamento do ganho da realimentação do vetor de estado para sistemas lineares incertos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA. **Anais ...** Campina Grande, PB, 2012. Citado na página 13.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; AO, E. A. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2013, p. 10, apr. 2013. Citado na página 13.

SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; AO, E. A. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **IEEE Trans. Fuzzy Syst.**, New York, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, jan. 2014. Citado na página 13.

SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; CARNIATO, A. A. Projeto de controle chaveado robusto para sistemas descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. In: XI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI. **Anais ...** Fortaleza, CE, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. Citado na página 19.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, may 1998. Citado na página 12.

A APÊNDICE A

Neste apêndice será apresentados algoritmos utilizados no *software* MATLAB para verificar a estabilidade de sistemas lineares com taxa de decaimento e para sistemas incertos com taxa de decaimento, tendo em vista que os outros casos são casos particulares destes.

A.1 Estabilidade de sistemas lineares com taxa de decaimento

```
clear all
clc
l=0.305;
m=0.21;
M=0.4573;
g=9.81;
a=1.7378;
b=7.6832;
A=[0 1 0 0; (M+m)*g/(M*l) 0 0 b/(M*l); 0 0 0 1;-m*g/M 0 0 -b/M]
B=[0; -a/(M*l); 0; a/M]

n=length(A);
X = sdpvar(n,n,'symmetric'); % Criando a matriz variável X_nxn simétrica
G = sdpvar(1,n);

alpha=2
% %XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
% %XXXXX LMIs estabilidade com taxa de decaimento XXXXXX
% %XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
LMI = set(X>0)+ ...
    set(A*X+X*A'-B*G-G'*B'+2*alpha*X< 0);

%Resolução das Lmis e opções de solvers
opts=sdpsettings;
opts.solver='lmilab';
%opts.solver='sedumi';
opts.verbose=0; % 0 não aparece o lixo e 1 aparece o lixo
result=solvesdp(LMI,[],opts);
```


A.2 Estabilidade de sistemas incertos com taxa de decaimento

```

clear all
clc
l=0.305;
lm=0.29
lM=0.31
m=0.21;
M=0.4573;
g=9.81;
a=1.7378;
b=7.6832;

A1=[0 1 0 0; (M+m)*g/(M*lm) 0 0 b/(M*lm); 0 0 0 1;-m*g/M 0 0 -b/M]
A2=[0 1 0 0; (M+m)*g/(M*lM) 0 0 b/(M*lM); 0 0 0 1;-m*g/M 0 0 -b/M]
B1=[0; -a/(M*lm); 0; a/M]
B2=[0; -a/(M*lM); 0; a/M]

n=length(A1);
X = sdpvar(n,n,'symmetric'); % Criando a matriz variável X_nxn simétrica
G = sdpvar(1,n);

alpha=2
% %XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
% %XX LMIs estabilidade de sistemas incertos com taxa XX
% %XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
LMI = set(X>0)+ ...
    set(A1*X+X*A1'-B1*G-G'*B1'+2*alpha*X< 0);
    set(A2*X+X*A2'-B2*G-G'*B2'+2*alpha*X< 0);

%Resolução das Lmis e opções de solvers
opts=sdpsettings;
opts.solver='lmilab';
%opts.solver='sedumi';
opts.verbose=0; % 0 não aparece o lixo e 1 aparece o lixo
result=solvesdp(LMI,[],opts);

disp('XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
CONTROLADOR XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX')
%Checando a factibilidade:
[p,d]=checkset(LMI);

```

```

        if sum(p<0) == 0

disp('*****O sistema é factível:*****')
        P=inv(double(X))
        G=(double(G));
        K=G*P
        else
            disp('O sistema não é factível!')
        end

%Condição inicial
x0=[pi/12; 0; 0.1; 0]
    sim('pendulo')

    figure(1);
subplot(3,1,1);
plot(tempo,x,'k','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('Posição (m)')
grid on
subplot(3,1,2);
plot(tempo,teta,'k','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('Posição Angular (rad)')
grid on
subplot(3,1,3);
plot(tempo,v,'k','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('Sinal de controle v')
grid on

```