

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO TOCANTINS

Campus Palmas
Curso Superior de Licenciatura Plena em Física

Francisco Mateus de Oliveira Costa

ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO NO CONCEITO
DE MOMENTO ANGULAR

PALMAS - TO
2017

Francisco Mateus de Oliveira Costa

Versão Original

**ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO NO CONCEITO DE
MOMENTO ANGULAR**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura
Plena em Física, como requisito parcial para a
conclusão de curso.

ORIENTADOR(A): PROF^o.MSC:HUMBERTO JOSE GAMA DA SILVA

PALMAS - TO
2017

Costa, Francisco Mateus de Oliveira
Álgebra De Clifford: Uma Aplicação No Conceito De Momento Angular/
Francisco Mateus de Oliveira Costa. – Palmas, 2017
43 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura
Plena em Física) – Instituto Federal de Educação do Tocantins,
Campus Palmas, 2017.

Orientador(a): Prof. Humberto Jose Gama da Silva

1. Álgebra de Clifford 2 Álgebra Vetorial I Álgebra De Clifford:
Uma Aplicação No Conceito De Momento Angular

Francisco Mateus de Oliveira Costa

**ÁLGEBRA DE CLIFFORD: UMA APLICAÇÃO NO CONCEITO DE
MOMENTO ANGULAR**

Aprovada em ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc. Humberto Jose Gama da Silva
Orientador

Prof.^a Dr.^a Cláudia Maria Alves Pegado - IFTO
Examinadora

Prof. Me. Ademar Paulo Junior - IFTO
Examinador

Prof. Me. Magno Márcio de Azevedo - IFTO
Suplente

COSTA, Francisco Mateus de Oliveira. **Álgebra de Clifford: uma aplicação no momento angular**. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plane em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Palmas, 2017.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é, a partir da seleção e leitura crítica da produção literária acerca das Álgebras Vetorial e Geométrica, direcionar o formalismo de Clifford ao estudo da dinâmica da rotação, especificamente no tratamento do vetor momento angular associado a um objeto que executa um movimento de rotação em torno de um ponto fixo. Estudou-se os aspectos históricos e matemáticos referentes a álgebra de Gibbs-Heaviside e a álgebra de Clifford de forma qualitativa. Aplicamos os princípios do formalismo de Clifford e de Gibbs-Heaviside, para obtenção do vetor momento angular. Com isso destacou-se a regra da mão direita que é utilizada na obtenção do sentido do resultado do produto vetorial de Gibbs que é um artifício mnemônico, porém na álgebra de Clifford não se usa esses artifícios se mostrando um formalismo consistente.

Palavras-Chave: Álgebra de Clifford; Álgebra Vetorial; Momento Angular;

COSTA, Francisco Mateus de Oliveira. **Álgebra de Clifford: uma aplicação no momento angular**. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Palmas, 2017.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to orientate Clifford's formalism to study the dynamics of rotation, specifically in treatment of the angular momentum vector associated to an object that executes a movement of rotation around a fixed point. Studied the historical and mathematical aspects of Gibbs-Heaviside algebra and Clifford algebra qualitatively. He stood out the principles of the formalism of Clifford and Gibbs-Heaviside, to obtain the angular momentum vector. With this we emphasize a rule of the right hand and an application in obtaining the meaning of the result of the vector product of Gibbs that is a mnemonic device, but in Clifford's algebra one does not use these devices if it shows a consistent formalism.

Keywords: Clifford's Algebra; Vector Algebra; Angular momentum.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS VETORES $\vec{A}$ E $\vec{B}$	5
FIGURA 2 MÉTODO DO POLÍGONO PARA DOIS VETORES	5
FIGURA 3 MÉTODO DO POLÍGONO PARA A SOMA DE TRÊS VETORES $\vec{A}, \vec{B}$ E $\vec{C}$	6
FIGURA 4 REPRESENTAÇÃO DO VETOR $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ATRAVÉS DO MÉTODO DO PARALELOGRAMO	7
FIGURA 5 MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR	8
FIGURA 6 PLANO CARTESIANO	9
FIGURA 7 REPRESENTAÇÃO DO PRODUTO ESCALAR	9
FIGURA 8 REPRESENTAÇÃO DO PARALELOGRAMO FORMADO PELOS VETORES $\vec{A}$ E $\vec{B}$	10
FIGURA 9 REGRA DA MÃO DIREITA	11
FIGURA 10 RESULTADO DOS PRODUTOS VETORIAIS	11
FIGURA 11 PRODUTO VETORIAL	12
FIGURA 12 OBJETOS GEOMÉTRICOS DE GRASSMANN	16
FIGURA 13 BIVETOR	16
FIGURA 14 BIVETORES FORMADOS POR $\vec{A}$ E $\vec{B}$	17
FIGURA 15 BIVETOR E SEU DUAL	19
FIGURA 16 PLANO FORMADO PELOS VERSORES $\hat{e}_1$ E $\hat{e}_2$	20
FIGURA 17 BIVETOR $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$	21
FIGURA 18 BASES BIVETORIAIS	22
FIGURA 19 CORPO EM TRAJETORIA CIRCULAR	28

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1.0 VETOR.....	4
1.1 Operações com vetores	5
1.1.1 Adição.....	5
1.1.2 Subtração.....	7
1.2 Produto de um vetor por um número real.....	7
1.3 Produto escalar.....	9
1.4 Produto vetorial.....	11
2.0 ASPECTOS HISTORICOS DAS ALGEBRAS DE GIBBS-HEAVISIDE E CLIFFORD	13
3.0 ALGEBRA CLIFFORD	16
3.1 Produto de Grassmann.....	19
3.2 Produto de Clifford	23
3.3 Operação Dualidade	26
4.0 MOMENTO ANGULAR.....	28
4.1 Aplicação	30
5.0 CONSIDERAÇÕES FINAIS	32
REFERENCIAS	34

INTRODUÇÃO

Ciência e tecnologia sempre foram imprescindíveis na construção e transformação das sociedades ao longo da história. Nessa direção, é indiscutível a importância das teorias e leis da Física no avanço do conhecimento científico e tecnológico –conhecimentos estes que são fundamentais nos dias atuais, e que se refletem nos mais diversos segmentos da sociedade.

Nesse processo de inovação social, o ensino de Física deve ser direcionado à compreensão da natureza em nossa volta, aos processos tecnológicos que nos cercam e à preparação para que possamos intervir na sociedade a qual estamos inseridos. Angotti, Bastos e Mion (2001) argumentam que aprender física, é um processo de absorção de saberes científicos históricos construídos por meio de bases sociais, de forma a fornecer esclarecimentos de fenômenos da natureza bruta, como também da natureza modificada, que está ao nosso redor. Na mesma direção, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Física (Brasil, 1998 – p. 4) acrescenta:

E esse sentido emerge na medida em que o conhecimento de Física deixa de constituir-se em um objetivo em si mesmo, mas passa a ser compreendido como um instrumento para a compreensão do mundo. Não se trata de apresentar ao jovem a Física para que ele simplesmente seja informado de sua existência, mas para que esse conhecimento transforme-se em uma ferramenta a mais em suas formas de pensar e agir.

No processo de ensino e de aprendizagem de Física, a descrição de seus fenômenos necessita uma linguagem matemática apropriada. Isso se justifica no fato de que, historicamente, problemas físicos foram motivadores para a criação de objetos matemáticos. Conforme argumentam Karan e Pietrocola (2009, p.02), “Matemática e Física estão intimamente relacionadas desde a mais remota essência do conhecimento científico e esta relação de influência mútua tem sido fundamental para o desenvolvimento de ambas”.

Nessa correlação construída ao longo da história, a álgebra é uma área muito importante para se expressar os conhecimentos da Física. De acordo com Thibes(2010. p. 2), é a área da matemática que se ocupa do estudo e classificação de estruturas algébricas:

Dada uma estrutura algébrica pronta, se analisa suas propriedades e, a partir de estruturas algébricas mais simples se constroem outras mais complexas, essas são as duas principais abordagens que basicamente

existem na álgebra.

No estudo de mecânica, a relação entre grandezas tais como espaço, velocidade, aceleração, força e tempo são feitas através de construções algébricas na forma de funções. Quando essas grandezas são descritas através de características geométricas, tais como direção e sentido, existe um sistema algébrico, chamado de Álgebra Vetorial, responsável pelo tratamento matemático dessas grandezas. Trata-se de um formalismo matemático relacionado à análise de objetos geométricos representados na forma de segmentos de retas orientados, denominados de vetores. Esta análise, traduzida num conjunto de fórmulas e técnicas para resolução de problemas, é bastante utilizada na Engenharia e na Física. Os principais precursores foram o inglês Oliver Heaviside e o norte americano Willard Gibbs, na segunda metade do século XIX. De maneira independente e em locais distintos, Gibbs e Heaviside realizaram trabalhos que culminaram nesse ferramental matemático.

Entretanto, os trabalhos de Gibbs e Heaviside deixaram lacunas conceituais, presentes até hoje nos livros nos cursos na área de exatas, que professores e alunos de Física e Matemática simplesmente acabam se “acostumando”. É possível citar como exemplo a regra da mão direita: um artifício mnemônico que identifica, em alguns casos específicos, a direção e o sentido de algumas grandezas vetoriais, tais como indução magnética, força magnética, torque etc. Todavia, conforme argumenta Silva (2010, p. 59), por trás dessa convenção existem propriedades de simetria, ocultadas pela grande maioria dos livros didáticos, que apontam inconsistências nessa regra. Além disso, não é abordada nas publicações direcionadas ao Ensino Superior e Médio a origem desse preceito.

Existe, no entanto, um formalismo matemático desenvolvido paralelamente aos trabalhos de Gibbs e Heaviside, no século XIX, que vão de encontro a essas inconsistências. Tal formalismo é chamado de Álgebra Geométrica ou Álgebra de Clifford (em homenagem à seu precursor). Com base nos trabalhos de Hamilton e Grassmann, Clifford desenvolveu um ferramental matemático no qual considerou outros objetos geométricos além de pontos e segmentos de retas orientados. O resultado foi uma álgebra mais intuitiva, consistente, livre de dicotomias conceituais ou regras de memorização como a regra da mão direita. Infelizmente seu formalismo foi preterido ao longo da história, e os trabalhos de Gibbs e Heaviside passaram a nortear o tratamento matemático direcionado ao estudo de fenômenos físicos. Todavia, graças ao esforço do norte americano David Hestenes, a partir da década de 1960, essa álgebra foi

reapresentada com o propósito de reinterpretar a Mecânica Quântica não- relativista (HESTENES, 1989) e relativista (HESTENES, 2003).

O objetivo desse trabalho é, a partir da seleção e leitura crítica da produção literária acerca das Álgebras Vetorial e Geométrica, direcionar o formalismo de Clifford ao estudo da dinâmica da rotação, especificamente no tratamento do vetor momento angular associado a um objeto que executa um movimento de rotação em torno de um ponto fixo.

Nesse sentido, o trabalho será dividido da seguinte forma: No capítulo 01, serão mostrados conceitos básicos referentes à vetores, tomando como referencia à Álgebra Vetorial, onde merecerão destaque os produtos escalar e vetorial. Nessa direção, será enfatizada a regra da mão direita, apontando suas inconsistências conceituais a partir das regras de simetria de vetores. No capítulo 02, serão apresentados aspectos históricos que culminaram nos trabalhos de Gibbs – Heaviside e Clifford. Os aspectos matemáticos da álgebra de Clifford serão tratados no capítulo 03. Conceitos pertinentes à Momento Angular serão mostrados no capítulo 04. Nessa direção, será resolvido um problema utilizando como ferramental matemático os formalismos de Gibbs – Heaviside e Clifford. No capítulo 5 faremos as considerações finais.

Capítulo 1: Vetor

Existem grandezas que ficam perfeitamente definidas quando expressas em função de um número e uma unidade de medida. Elas são chamadas de grandezas físicas escalares. Podemos citar como exemplo massa, volume, temperatura etc. Entretanto, existem grandezas que só ficam completamente definidas quando expressas por um número, uma unidade de medida, uma direção e um sentido. Elas são chamadas de grandezas físicas vetoriais. Podemos citar como exemplo deslocamento, velocidade, aceleração, força, etc.

Para caracterizar as grandezas vetoriais foi criado um objeto geométrico que é um segmento de reta orientado. Tal objeto recebe o nome de vetor. De acordo com Vieira(2008, p.1) “O conceito de vetor foi criado justamente para descrever grandezas que possuem propriedades geométricas tais como direção e sentido e que, por este motivo, não podiam ser completamente descritas por meros números”. Concordando com Silva(2010, p.27), “A representação de um vetor pode ser feita através de uma letra (maiúscula ou minúscula) com uma seta sobre ela ($\vec{A}$ ou $\vec{b}$); através de duas letras maiúsculas ($\overrightarrow{AB}$), onde a primeira letra representa a origem do vetor e a segunda, a extremidade; através de letras em negrito (**a** ou **B**)”.

Ricardo Soares Vieira, acrescenta:

Os vetores podem ser vistos, pelo ponto de vista geométrico, como segmentos de reta orientados, a representação das grandezas vetoriais é feita da seguinte forma: o comprimento do vetor informa a magnitude da grandeza, a direção desta é determinada pela reta suporte do vetor e o seu sentido por uma flecha colocada em uma das extremidades dele. Estas três propriedades, magnitude, direção e sentido, são suficientes para descrever um vetor em sua totalidade (Vieira, 2008, p. 1).

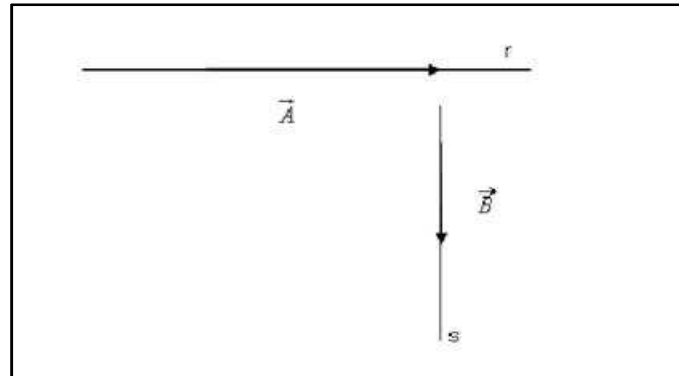
Sendo um vetor um segmento de reta orientado, suas propriedades são:

Magnitude: é o tamanho do segmento e está ligado à quantidade da grandeza que ele está associado. Na figura 1 o comprimento do vetor $\vec{A}$ é o dobro de $\vec{B}$.

Direção: é especificada pela reta-suporte que define o segmento que representa o vetor. A figura 1 mostra as retas sobre as quais os vetores estão desenhados, no caso horizontal para $\vec{A}$ e vertical para $\vec{B}$.

Sentido: a flecha que está na ponta do vetor caracteriza o seu sentido.

Figura 1 Representação geométrica dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$



Fonte: Silva (2010, p. 28)

1.1 Operações com vetores

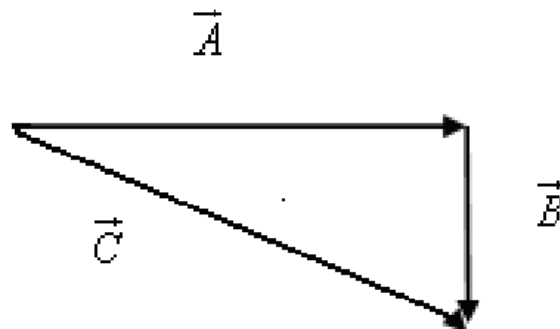
Na álgebra de Gibbs-Heaviside existem três operações com vetores: a adição, subtração e multiplicação por escalar. As mesmas serão descritas a seguir:

1.1.1 Adição

Para fazer a soma entre dois ou mais vetores podemos utilizar dois processos: a regra do polígono e a regra do paralelogramo.

Na regra do polígono, devemos unir a origem de um vetor à extremidade do outro, mantendo inalteradas as propriedades de cada um. Por último traçamos um segmento de reta orientado ligando a origem do primeiro vetor à extremidade do segundo. Com isso obtemos o vetor $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$. Verifica-se que a propriedade comutativa também é válida no estudo de vetores.

Figura 2 Método do polígono para dois vetores



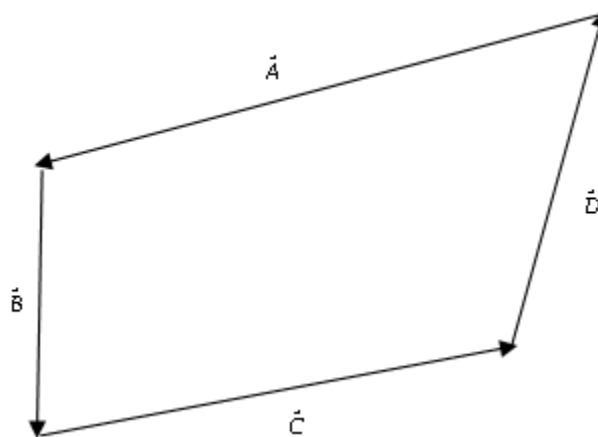
Fonte: Silva (2010, p. 28)

O módulo do vetor resultante $\vec{C}$, pode ser calculado de forma analítica utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 \quad (1)$$

Podemos utilizar, também, o método do polígono quando temos mais de dois vetores:

Figura 3 Método do polígono para a soma de três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$



Fonte: Elaborada pelo autor

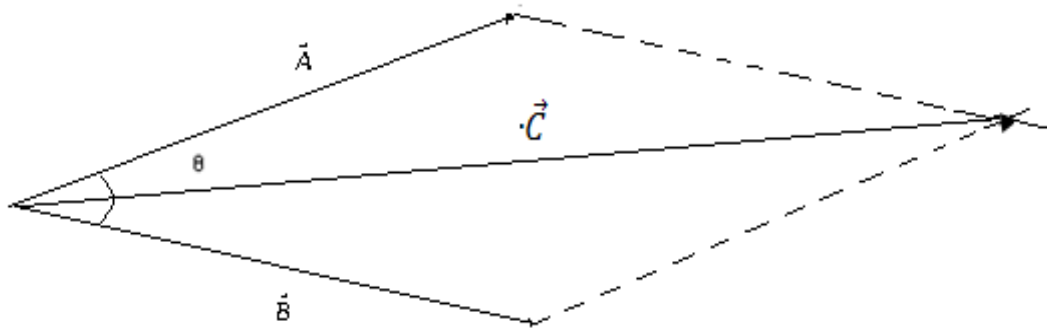
De acordo com a figura acima observa-se que o vetor $\vec{D}$ é igual a soma dos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ ou seja:

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \quad (2)$$

Para esse caso, o método do polígono é usado apenas para uma representação geométrica do vetor resultante, a menos que trabalhem com papel milimetrado.

Para obtermos o módulo da soma de dois vetores, utilizamos o método do paralelogramo. A desvantagem desse método é que só é possível somar vetores aos pares (dois a dois). Consiste em fazer coincidir as origens dos dois vetores que desejamos somar, preservando as propriedades de ambos, completando o paralelogramo em seguida. O vetor soma $\vec{C}$ tem origem na origem dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e extremidade na intersecção das duas linhas pontilhadas.

Figura 4 Representação do vetor $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ através do método do paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

O módulo do vetor soma $\vec{C}$ é obtido através da lei dos co-senos.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad (3)$$

1.1.2 Subtração

Na subtração de vetores, o processo é análogo da adição, pois temos a soma do primeiro vetor com o oposto do segundo.

$$\vec{E} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (4)$$

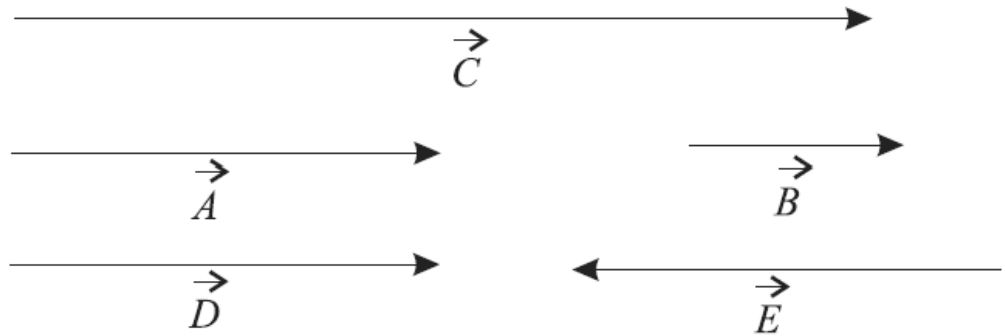
1.2 Produto de um vetor por um número real

Os vetores também podem ser multiplicados por um número real, conforme Silva(2010, p. 32) “É possível multiplicar um vetor por um número. O resultado é outro vetor, cujo módulo corresponde ao tamanho do vetor inicial multiplicado pelo respectivo número”.

Machado(2007, p. 13 Apud Silva, 2010, p. 32) esmiúça bem essa propriedade: “o vetor $\vec{B} = K\vec{A}$ pode ser maior do que $\vec{A}$ se $K > 1$; igual a $\vec{A}$ se $K = 1$; e menor do que $\vec{A}$ se $K < 1$. Quando ocorrer $k < 0$, o produto é um vetor cujo sentido é contrário ao inicial. Se $k = 0$, o resultado é um vetor nulo”.

Figura 5 Multiplicação de um número por um vetor

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{A}, \vec{C} = 2\vec{A}, \vec{D} = 1\vec{A}, \vec{E} = -1\vec{A}$$



Fonte: Machado(2007, p. 13 Apud Silva, 2010, p. 32)

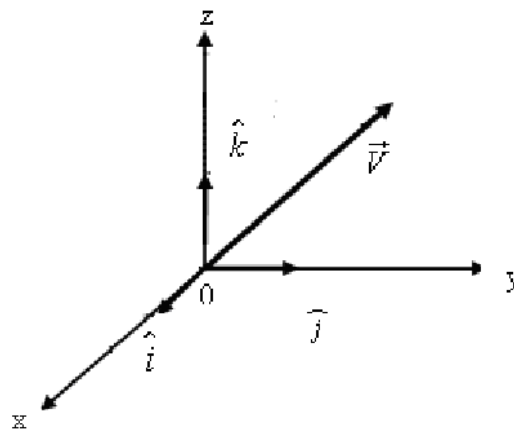
A partir do princípio do produto de um número real por um vetor, se tem a definição de vetor unitário, que é um vetor com módulo igual a 1 e pode ser representado por $|\vec{A}| = 1$ ou $\hat{A}$ (Silva, 2010).

Esse vetor também pode ser chamado de *versor* de acordo com Silva(2010, p. 32):

“Um versor trata-se de um vetor na direção de um eixo de norma ou módulo unitário. Também é usual chamar vetores de bases ou vetores unitários. Em um sistema de coordenadas retangulares, esses versores são comumente chamados de $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.”

A ideia de versor fica bem explícita quando se fala de vetores no plano cartesiano, conforme argumenta Silva (2010, p. 33):

Convencionou-se que o versor na direção x é representado por $\hat{i}$; na direção y, representado por $\hat{j}$ e na direção z, por $\hat{k}$. O conjunto desses versores forma uma base para o espaço tridimensional, representada por $R_3 = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.



Fonte: Silva(2010, p. 33)

Observando a imagem acima vê-se que o vetor com origem em 0 é descrita em função das suas componentes como por exemplo o vetor $\vec{V}$:

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \quad (5)$$

Conforme Silva(2010, p. 34), “O módulo do vetor $\vec{V}$ é encontrado pela versão tridimensional do Teorema de Pitágoras”:

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (6)$$

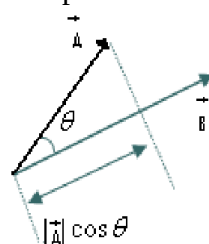
1.3 Produto escalar

Por definição, o produto escalar entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \theta \quad (7)$$

Essa notação é mais bem explicitada na figura abaixo:

Figura 7 representações do produto escalar



Fonte: Silva(2010, p. 34)

O produto escalar, permite transformar dois vetores em um número real ou escalar, ou seja, fazendo esse produto entre dois vetores temos como resultado um número real.

O ângulo θ que aparece na equação anterior é o ângulo formado entre os dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Esse produto também pode ser utilizado para se calcular o módulo de vetor, da seguinte forma:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta = |\vec{v}|^2 \cos 0 = |\vec{v}|^2 \quad (8)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}|^2} \quad (9)$$

Esse conceito se expande para vetores em três dimensões, conforme Machado(2004, p. 40 apud Silva, 2010, p. 36), “numa base ortonormal que siga as propriedades do produto escalar de versores, o módulo de um vetor é dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados das suas componentes”, ou seja, uma base em que os vetores são unitários e o ângulos entre eles sejam retos facilita a observação do produto escalar. Como mostra a equação abaixo:

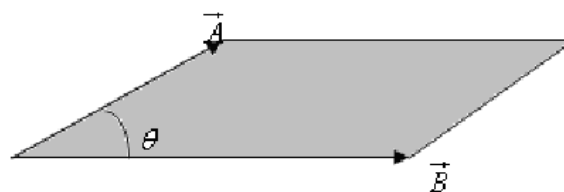
$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (10)$$

1.4 Produto vetorial

Por definição, o produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ($\vec{A} \times \vec{B}$) é o vetor $\vec{C}$ ortogonal ao paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, em que, o módulo de $\vec{C}$ corresponde à área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \theta \quad (11)$$

Figura 8 representação do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$



Quando temos vetores descritos numa base ortonormal em $R_3 = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$:

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0;$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0;$$

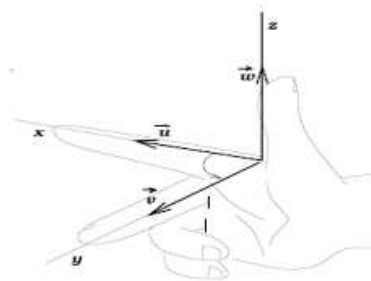
$$\hat{k} \times \hat{k} = 0.$$

A direção do vetor resultando é, por definição, “ortogonal ao plano que contém os dois vetores.

O sentido é dado pela regra da mão direita, cujo procedimento mnemônico, Machado(2004, p.41 Apud Silva, 2010, p.37) explica:

Considere os dedos indicador e médio da mão direita. Represente o primeiro vetor do produto vetorial pelo dedo indicador, e o segundo, pelo dedo médio (a ordem é importante) Disponha esses dedos da mesma forma como os vetores estão no espaço. Agora forme, com o polegar da mão direita, um ângulo de 90° com o plano formado pelos outros dedos. O sentido do vetor é o mesmo que o indicado pelo polegar.

Figura 9 Regra da mão direita



Fonte: Machado(2004, p. 41 Apud
Silva, 2010, p. 37)

Com a regra da mão direita pode-se obter:

Figura 10 Resultado dos produtos vetoriais

$$\begin{array}{lll} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} & \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \\ \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} & \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} & \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \end{array}$$

Fonte: Silva (2010, p. 38)

Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ escritos como combinação linear de seus versores e de suas componentes em um sistema de coordenadas retangulares em R_3 :

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \text{ e } \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}. \quad (12)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \quad (13)$$

Utilizando a propriedade distributiva e considerando os produtos vetoriais dos versores utilizando a regra da mão direita, obtêm-se:

Figura 11 Produto Vetorial

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}.$$

Fonte: Silva (2010, p. 38)

De acordo com Menon (2009) o pragmatismo da regra da mão direita não pode ser criticado, porém cria-se uma lacuna pedagógica, visto que o conceito do produto vetorial (comumente aplicado na obtenção de algumas grandezas físicas) fica sem ser entendido pelos alunos.

Ricardo Soares Vieira em seu trabalho publicado em 2008 cita alguns paradoxos que se observam na álgebra de Gibbs -Heaviside, uma deles é quando se faz um produto vetorial entre dois vetores, o resultado não se altera diante uma reflexão especular.

Apresentadas essas inconsistências matemáticas e pedagógicas, gera algumas dúvidas a respeito das definições do sentido do vetor resultante no produto vetorial: A explicação matemática para a direção do vetor; por que o produto vetorial não se altera em uma reflexão especular; qual a relação entre o produto escalar e o produto vetorial. Elas são resolvidas na Álgebra de Clifford, também chamado de álgebra geométrica, e esse formalismo será comentado nos próximos capítulos.

CAPITULO 2: ASPECTOS HISTÓRICOS DAS ÁLGEBRAS DE GIBBS – HEAVISIDE E CLIFFORD

A história do cálculo vetorial remonta à Grécia antiga. Euclides foi o primeiro a idealizar a representação de objetos algébricos através de objetos geométricos e operações geométricas através de operações algébricas(Borges, 2004).

No entanto, a ideia de construir um objeto algébrico a partir de um objeto geométrico era muito limitada. Ficava restrito às operações simples do tipo $y=y^2$. Como interpretar um número irracional, ou mesmo um x elevado a um expoente maior que três?

Só no século XVII é que René Descartes(1596-1650) conseguiu interpretar alguns problemas da geometria por meio de métodos algébricos, conforme argumenta Vieira(2008, p.2), “Descartes deu à geometria de Euclides um formalismo analítico, onde cada ponto do espaço pôde ser representado por um par ordenado de números (cada qual relacionado a um dos eixos de um sistema de coordenadas) ”.

O problema da raiz quadrada dos números negativos foi resolvido com a Teoria dos Números complexos de Carl F. Gauss (1777-1855) e Jean R. Argand (1768-1822).Essa idéia instigou bastante os matemáticos dessa época, pois observaram que os números complexos podiam ser representados em um plano cartesiano.Com isso, observaram que outros objetos matemáticos poderiam também ser representados em um plano tridimensional.

Mas logo apareceu um impasse, pois não conseguiram ampliar a ideia dos números complexos para a terceira dimensão.

Conforme Vieira(2008), a princípio se pensou que para resolver o problema bastava procurar um número complexo que teria três partes, porém, esse pensamento não foi eficaz, uma vez que apareciam várias contradições quando se tentava aplicar a álgebra dos números complexos.

Borges(2004), afirma que W. Hamilton, em 1844, publicou um sistema que generalizava os números complexos, esse sistema foi chamado de Quaternion. Vieira(2008, p. 3) explica de forma clara a descoberta de Hamilton:

Hamilton percebeu que o erro estava em se tentar associar o conjunto $\Re$ dos números reais a um dos eixos, pois era justamente isso o que fazia aparecer as contradições encontradas em outras tentativas. Dever-se-ia, portanto, associar a cada eixo do sistema, conjuntos imaginários, J e I , mas que fossem independentes uns dos outros, assim como os números reais

são independentes em relação aos imaginários. Adicionando a estes três conjuntos o conjunto dos números reais, Hamilton pôde generalizar a álgebra dos números complexos, que agora continha quatro partes. A este novo objeto complexo, Hamilton chamou de quaternion.

Borges(2004) argumenta que para se descrever operações no espaço tridimensional como rotações, os quatérnios se mostraram objetos extremamente adequados. Vieira(2008, p. 4) comenta que, “Com este formalismo, as regras válidas para os números complexos eram satisfeitas, com a única diferença de que o produto quaterniônico não é uma operação comutativa, contrariamente ao produto de números complexos”.

De acordo com Vieira(2008), os quatérnios se aplicavam na descrição de vários fenômenos naturais, exaltando ainda mais sua importância para ciência, que se expressa por uma linguagem matemática, sendo que a partir dessa ideia os matemáticos se instigaram a pesquisar novos objetos matemáticos adequados para o estudo de fenômenos da natureza.

Hermann Grassmann (1809-1877) em 1844, representou segmentos de reta por objetos geométricos que ele denominou de vetores(Borges, 2004). Vieira(2008, p. 3), fala sobre outros objetos geométricos além de segmentos de reta orientados:

Estes objetos seriam como retas orientadas, fragmentos de plano orientados, cubos orientados, etc. Podemos dizer que foi exatamente neste ponto que surgiu o conceito de objetos vetoriais, como os nossos conhecidos vetores, e além: já lá estavam presentes aqueles outros objetos geométricos comentados no início do texto, quais sejam 2-vetores, 3-vetores, etc...

O trabalho de Grassmann ficou esquecido por um tempo, devido à complexidade das suas descobertas e também por ele não ser um matemático renomado(Vieira, 2008). A descoberta dele teve reconhecimento de vários estudiosos do assunto somente quando ele estava no fim de sua vida. Nessa direção, Josiah Willard Gibbs (1839-1903) foi o que mais se interessou pelos Quaternions de Grassman. Gibbs mostrou a relação entre o trabalho de Hamilton e o de Grassman, publicando vários artigos na revista *Nature*(Silva, 2010).

Na mesma época que Gibbs estudava o trabalho de Hamilton, Oliver Heaviside (1850-1925) chegou a resultados parecidos com o de Gibbs. Surgia, dessa forma, a

Álgebra Vetorial como é conhecida até hoje. Entretanto, outros objetos geométricos de Grassmann, como bivectores e trivetores, não foram considerados. O resultado foi uma álgebra que não é uma generalização dos sistemas de Hamilton e Grassmann, pois são observados alguns problemas de caráter matemático.

William Kingdon Clifford (1845–1879) desenvolveu uma álgebra que incorporou os quaternions de Hamilton aos objetos geométricos de Grassmann. Segundo Vaz Junior (1996, p. 236 Apud Silva 2010, p. 44), o trunfo de Clifford “foi introduzir o produto quaterniônico dentro da estrutura de Grassmann, obtendo assim um sistema naturalmente adaptado à geometria ortogonal de um espaço arbitrário”.

Considerando a Álgebra Geométrica tão eficiente e isenta das inconsistências do formalismo de Gibbs, surge uma indagação: por que desde o século XIX a Álgebra Geométrica não foi adotada no estudo dos fenômenos físicos? Por que a álgebra de Gibbs foi a elegida?

A resposta é que Clifford morreu muito cedo, antes de completar seu trabalho, além de ser pouco conhecido pela comunidade científica de sua época. Vieira (2008) argumenta que a complexidade dos trabalhos de Clifford também contribuiu para a não aceitação de sua álgebra na época em que foi escrita.

No entanto, teve uma pessoa que retirou os trabalhos de Clifford da escuridão: o professor americano Davis Hestenes, que demonstrou como a Álgebra geométrica se adequa à descrição dos fenômenos naturais e ainda está livre de alguns problemas que a Álgebra de Gibbs-Heaviside apresenta. Com isso muitos outros matemáticos tiveram interesse na Álgebra de Clifford. (Vieira, 2008).

(Doran e Lasemby, 2007, p.11 apud Silva, 2010, p. 44), argumenta que:

a Álgebra de Clifford reaparece como a Álgebra subjacente ao quantum spin. Em particular, as Álgebras das matrizes de Pauli e Dirac, que possuem a mesma estrutura da Álgebra geométrica, tornaram-se indispensáveis na elaboração da teoria quântica, com a diferença que no formalismo de Clifford, o conceito de spinor aparece de forma bem mais simples.

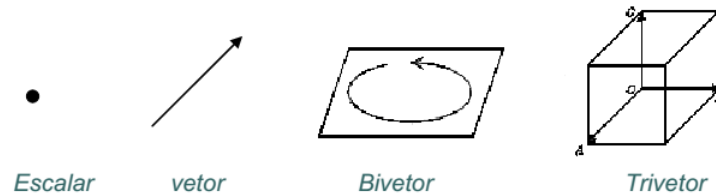
Vaz Junior (1997 apud Vieira, 2008) acrescenta que ela é adequada para descrever desde tópicos modernos, tal qual relatividade restrita, álgebra geométrica simplifica de forma surpreendente toda a descrição da natureza, e ainda, com a álgebra vetorial as oito equações de Maxwell, se tornaram quatro, porém na álgebra geométrica

ela se torna apenas uma equação.

CAPITULO 3: ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Na Álgebra de Clifford, também conhecida como álgebra Geométrica, utilizam-se outros objetos geométricos, além de segmentos de reta orientados. Nesse formalismo, além dos já conhecidos vetores também são utilizados os bivectores, trivetores e assim k-vetores.

Figura 12 Objetos geométricos de Grassmann



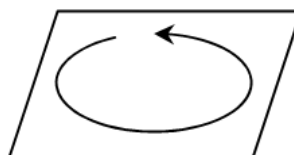
Fonte:Silva(2010, p. 40)

Nessa álgebra também foi incorporado o conceito de **grade**. A grade de um objeto vetorial permite sua classificação de acordo com o seu objeto geométrico. Como mostra a figura acima: um escalar tem grade 0, o vetor tem grade 1, bivector tem grade 2 e o trivetor tem grade 3. No caso de um k-vetor ele terá uma grade k (Silva, 2010).

As grandezas angulares como o torque de uma força e o momento angular(foco de nosso trabalho) ficam melhores representadas se utilizarmos fragmentos de planos orientados, uma vez que essas grandezas atuam em torno de um plano e não de uma reta.

O fragmento de plano citado para representar as grandezas angulares é chamado de bivector, esse objeto geométrico é representado de acordo com a figura abaixo:

Figura 13 Bivetor



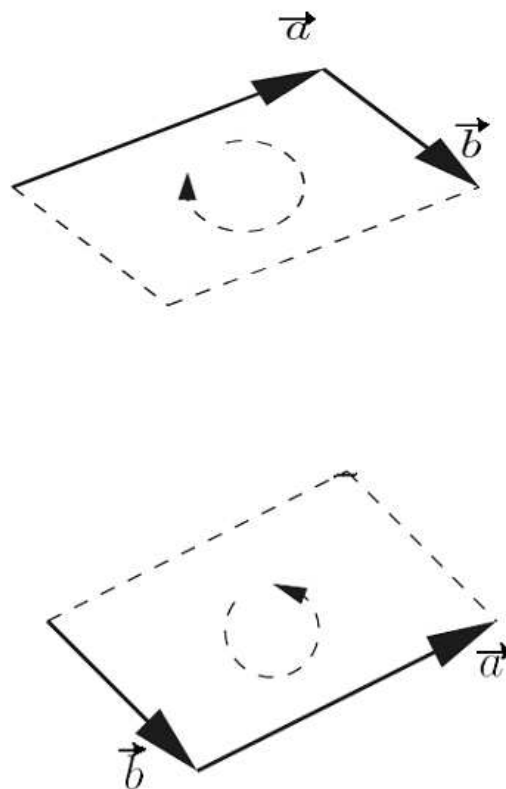
Fonte:Vieira(2008, p. 2)

Conforme afirma Vieira(2008, p. 2), o objeto vetorial chamado bivector nada mais é do que um fragmento de plano orientado: o valor de sua área informa a magnitude da grandeza por ele representada, a direção da grandeza é determinada pela direção do plano-suporte do bivector, e também admite dois sentidos: horário ou anti-horário.

O trabalho vai ficar limitado ao uso dos bivectores, no tratamento algébrico direcionado ao momento angular.

Considere dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Se estendermos o vetor $\vec{b}$ através do vetor $\vec{a}$ ou vice-versa, vamos ter um fragmento de plano orientado, que, conforme foi citado trata-se de um bivector, de acordo com a figura a seguir:

Figura 14 Bivectores formados por $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Fonte: Silva(2010, p. 41)

Na Álgebra de Gibbs, a área delimitada pelos dois vetores corresponderia ao módulo do vetor $\vec{c}$ ou o módulo do produto vetorial entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Na Álgebra de Clifford adotaremos outro operador para encontrar o módulo do vetor $\vec{c}$, esse operador será o produto externo ou produto de Grassman. Esse produto é a extensão do vetor $\vec{a}$ sobre o vetor $\vec{b}$ ou vice-versa. Será representado pelo símbolo

$\wedge$ (cunha). Assim, se consideramos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ o produto de Grassman ficará $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Ele é comutativo, como mostrado abaixo:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (14)$$

O produto é a extensão de um vetor sobre o outro, assim se estendermos um vetor por ele mesmo não formara nenhuma área:

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0; \vec{b} \wedge \vec{b} = 0. \quad (15)$$

Propriedades importantes do produto externo:

$$\text{Associativa: } (\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\text{Comutativa: } \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b})\lambda$$

$$\text{Distributiva: } \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$$

Resta uma pergunta: se o produto externo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é um bivector, como podemos representá-lo como um segmento de reta orientado? A resposta está no conceito de *dualidade*.

De acordo com Vieira (2008, p. 18), “dentro de um mesmo sistema n-dimensional, o *dual de um objeto vetorial* consiste em outro objeto vetorial que apresenta o mesmo número de componentes”. O número de componentes para cada objeto geométrico é obtido através da seguinte expressão:

$$[nk] = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (16)$$

Onde k é a grade e n a dimensão. Aplicando a equação da dualidade no escalar, vetor, bivector e trivector, temos:

$$0\text{-vetor} \rightarrow N_0 = [n0] = 1$$

$$1\text{-vetor} \rightarrow N_1 = [n1] = 3$$

$$2\text{-vetor} \rightarrow N_2 = [n2] = 3$$

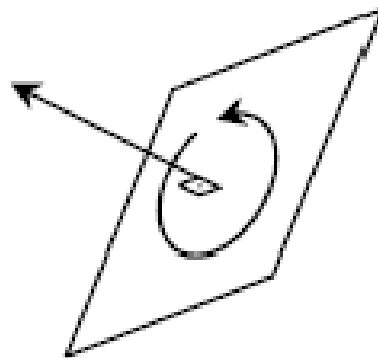
$$3\text{-vetor} \rightarrow N_3 = [n3] = 1,$$

Com isso, o 1- vetor tem o mesmo número de componentes no sistema tridimensional que o 2-vetor, assim os dois formam um dual. Conforme afirma Vieira (2008, p. 19):

Dessa forma é possível definir dualidade como sendo a operação cujo objetivo é transformar um p-vetor em um q-vetor dual. O q-vetor procurado deve ter o mesmo módulo do p-vetor original uma vez que ambos devem representar a mesma grandeza. Em um sistema tridimensional a direção do q-vetor dual é ortogonal a do p-vetor original. A escolha do sentido é arbitrária, ou seja, depende apenas de uma mera convenção.

A importância de se determinar o dual de um vetor reside no fato de que, a partir de um p-vetor, é possível definir um q-vetor dual que represente a mesma grandeza, só que de forma mais clara. Observe abaixo um bivector e seu dual.

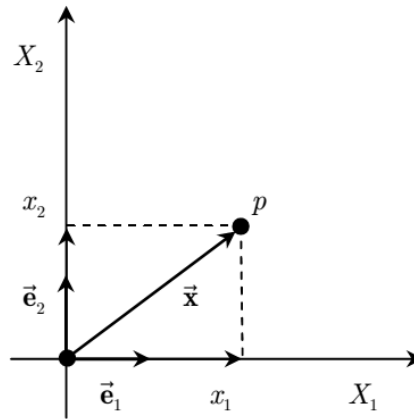
Figura 15 bivector e seu dual



Fonte: Vieira(2008, p.23)

3.1 Produto de Grassmann

Considere o sistema de coordenadas vetoriais abaixo :

Figura 16 Plano formado pelos versores $\hat{e}_1 \hat{e}_2$ 

Fonte: Vieira(2008, p. 6)

Geralmente o plano cartesiano em três dimensões no caso R_3 , é simbolizado pelos versores, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$. O plano da figura acima, pensando futuramente em uma forma n-dimensional, trocaremos esses versores por $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$, e eles formaram a base desse sistema(Silva, 2010). Conforme diz, Vieira(2008 apud Silva 2010, p. 46) “Vamos associar a cada eixo um versor $\hat{e}_i$, colinear ao respectivo eixo e coincidente com a origem, de forma que as coordenadas de um ponto qualquer agora se tornem um vetor”.

O ponto p da figura pode ser denotado da seguinte forma:

$$\vec{x} = (x_1 \hat{e}_1, x_2 \hat{e}_2, \dots, x_n \hat{e}_n) \quad (17)$$

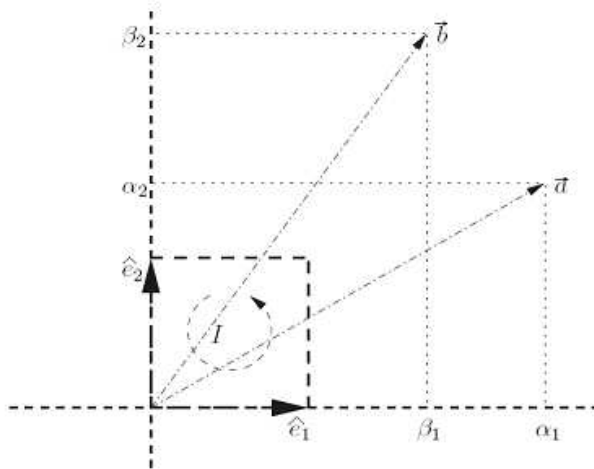
De acordo com Silva(2010), o vetor acima pode ser escrito como a adição de suas componentes, pois são entidades vetoriais. Assim o vetor $\vec{x}$ é representado por :

$$\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_n e_n \quad (18)$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras calcula-se o modulo do vetor:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots (x_n)^2} \quad (19)$$

Vamos considerar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no Plano euclidiano bidimensional (Silva, 2010):

Figura 17 Bivector $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$.

Fonte: Sutter (2003, p. 9 apud Silva, 2010, p. 47)

Essa figura ilustra a decomposição de dois números $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2)$ em uma base de versores $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ de acordo com a figura, decompondo os vetores temos:

$$\vec{a} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 ; \quad (20)$$

$$\vec{b} = \beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 \quad (21)$$

Agora faremos o produto externo com esses dois vetores:

$$\hat{a} \wedge \hat{b} = (\alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2) \wedge (\beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2) \quad (22)$$

Aplicando as propriedades distributivas e comutativas, considerando também que o produto externo de um vetor por ele é igual a zero, assim tem-se:

$$\hat{a} \wedge \hat{b} = (\alpha_1 \beta_2 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2) + (\alpha_2 \beta_1 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1) \quad (23)$$

Sabendo que:

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 \quad (24)$$

O produto externo fica desta forma:

$$\hat{a} \wedge \hat{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \quad (25)$$

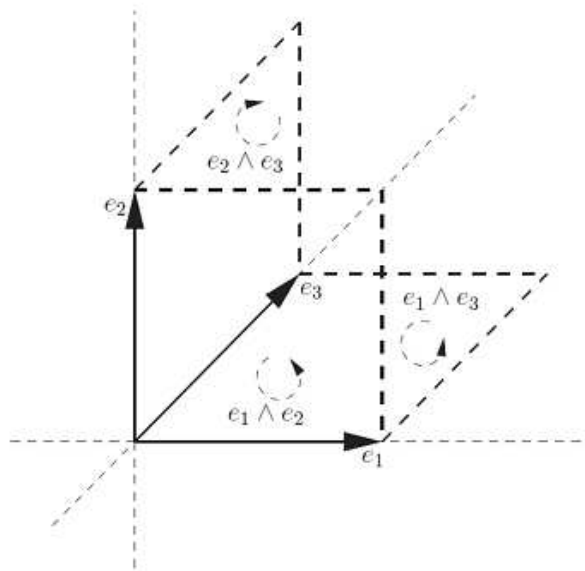
Susbtituindo $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ por I' , tem-se:

$$\hat{a} \wedge \hat{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I' \quad (26)$$

Em que I' é um bivetor de área unitária.

Vamos estender o produto de Grassmann para um sistema de coordenadas retangulares em R_3 . A base vetorial será $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Assim teremos três bases bivetoriais $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_{12}$, $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{13}$ e $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_{23}$ (Silva, 2010). A figura abaixo mostra o que foi dito:

Figura 18 bases bivetoriais



Fonte: Sutter (2003, p. 10 apud Silva, 2010, p. 49)

Dessa forma podemos escrever os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como combinação linear dos seus versores e de suas componentes no três eixos coordenados:

$$\vec{a} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3 ; \quad (27)$$

$$\vec{b} = \beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3 . \quad (28)$$

Fazendo o produto externo entre esses dois vetores tem-se:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3) \wedge (\beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3) \quad (29)$$

Utilizando a propriedade distributiva e aplicando regras do produto externo :

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0;$$

$$\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = \hat{e}_{ij};$$

$$\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i = -\hat{e}_{ij}.$$

O produto dos vetores fica assim:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \hat{e}_{12} + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \hat{e}_{13} + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \hat{e}_{23} \quad (30)$$

Diferente do produto vetorial da álgebra de Gibbs-Heaviside, o produto externo tem uma abrangência maior, pois trabalha em todas as dimensões. Acrescenta-se que o produto vetorial calcula um subespaço perpendicular, ao contrário do produto de Grassmann, que calcula um paralelo. (Sutter 2003, p. 13 apud Silva, 2010).

3.2 Produto de Clifford

Vamos considerar um vetor $\vec{v}$ em duas dimensões:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2; \quad (31)$$

Obtendo o modulo do vetor através das regras do produto escalar (ou produto ponto):

$$\vec{v} \vec{v} = (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2)(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = |\vec{v}|^2; \quad (32)$$

Utilizando a propriedade de distribuição, temos o seguinte:

$$|\vec{v}|^2 = v_1 v_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + v_2 v_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 \quad (33)$$

Sabemos pela geometria euclidiana que $|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2$ (Silva, 2010), com isso a equação acima fica:

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1 v_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + v_2 v_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 \quad (34)$$

De acordo com as regras do produto escalar, os dois primeiros membros da equação fornecem o modulo do vetor e os dois últimos membros são iguais à zero.

$$v_1 v_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + v_2 v_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0 \rightarrow v_1 v_2 (\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1) = 0 \quad (35)$$

Portanto $\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0$, implicando que $(\vec{e}_1 \vec{e}_2) = -(\vec{e}_2 \vec{e}_1)$.

De acordo com Silva(2010, p. 52), “Generalizando esses argumentos para sistemas n-dimensional encontramos, portanto, as seguintes relações que definem o produto geométrico na geometria euclidiana ortogonal”.

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -(\vec{e}_j, \vec{e}_i); \quad (35)$$

$$\vec{e}_i \vec{e}_i = 1. \quad (36)$$

Conforme demonstra Vieira(2008), utilizando as relações acima e dois vetores genéricos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ele obtêm o produto geométrico.

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \quad (37)$$

$$\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 \quad (38)$$

O produto entre eles fica da seguinte forma:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2)(w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2) \quad (39)$$

Utilizando a propriedade distributiva e as operações que definem o produto geométrico temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1 w_1 + v_2 w_2) + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{e}_1 \vec{e}_2 \quad (40)$$

Observando a equação acima vemos que o primeiro termo corresponde a um escalar, pois não tem versores, sendo conhecido por produto de Gibbs-Heaviside representado por $v \cdot w$. Mas chamaremos de produto interno representado por $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Esse produto é definido pela seguinte relação na Geometria:

O segundo termo é conhecido por produto externo produto de Grassman(Silva, 2010):

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{e}_1 \vec{e}_2 = vw \sin \alpha_{vw} \quad (41)$$

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}| = (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{e}_1 \vec{e}_2 = |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \alpha_{vw} \quad (42)$$

Silva (2010, p. 54), conclui o seguinte:

o produto externo está associado a fragmentos de planos e não a segmentos de retas, logo não pode ser um vetor. Também não pode ser um escalar, pois os versores $\vec{e}_1 \vec{e}_2$ garantem características vetoriais, orientando-o no sentido horário ou anti-horário. Isto tudo nos leva associar de forma inevitável uma natureza bivetorial ou 2-vetor.

Observemos ainda que o conjunto de versores $\vec{e}_i \vec{e}_j$ se comporta de forma análoga a base $\vec{e}_{ij}$ os bivectores...

Tal produto foi definido por Clifford como produto geométrico. Pode-se escrever o produto de Clifford como uma soma entre o produto de Gibbs e Heaviside e o de Grassmann. O produto geométrico de dois vetores resulta em um multivetor, contendo um 0-vetor e um 2-vetor (Silva, 2010):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (43)$$

Generalizando para o sistema n-dimensional:

$$\vec{v} \vee \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots v_n w_n ; \quad (44)$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \sum_{1,2}^{m,n} (v_i w_j - v_j w_i) \vec{e}_i \vec{e}_j . \quad (45)$$

Por meio do produto de Clifford, é permissível operar com os versores:

$$e_1 e_1 = e_2 e_2 = e_3 e_3 = 1 \quad (46)$$

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 \quad (47)$$

$$e_1 e_3 = -e_3 e_1 \quad (48)$$

$$e_2 e_3 = -e_3 e_2 \quad (49)$$

Isso nos permite afirmar que $e_i e_i = 1$ e $e_i e_j = -e_j e_i$.

3.3 Operação Dualidade

Anteriormente foi falado que o dual de um objeto vetorial consiste em outro objeto vetorial que apresenta o mesmo número de componentes. Concordando com Vieira(2008), o conceito de dualidade se justifica no fato de que estas propriedades possibilitam associar a cada p-vetor um certo q-vetor dual (sendo $q = n - p$). Assim Vieira(2007, p. 22), fala sobre como esse processo acontece:

A questão se resume agora em dizer como podemos transformar um p-vetor no seu dual. Como a operação que procuramos preservar o módulo do vetor original, está só pode atuar nos versores do p-vetor, e não nos seus coeficientes, assim, vamos nos reter apenas a estes versores. É fácil verificar que cada componente do p-vetor será formado pela combinação dos versores do sistema, tomados de p a p , logo, o número de versores de cada um de seus termos será justamente igual à sua grade p . Já o conjunto que forma a base do sistema terá todos os n versores existentes neste sistema (este conjunto terá grade n) e justamente por isso, se multiplicarmos geometricamente o p-vetor pelos os versores desta base, digamos pela esquerda, então os versores do p-vetor se cancelarão com os versores iguais presentes na base, de tal forma que vamos obter um q-vetor com $n-p$ versores, e estes versores serão, todos eles, diferentes, em cada termo, dos existentes no p-vetor original. O fato de os termos do q-vetor resultante possuírem $n-p$ versores faz com que a grade deste q-vetor seja $q=n-p$.

Então, para operar a dualidade, utiliza-se o operador Hodge representador por $*$, em que $* = \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, considerando um sistema de coordenadas retangulares em R_3 .

Utilizando dois versores arbitrários $e_2 e_3$, vamos calcular o dual de um bivector.

$$*(e_2 e_3) = e_1 e_2 e_3 (e_2 e_3) \quad (50)$$

Considerando as propriedades de multiplicação geométrica em que $e_i e_i = 1$ e

$$e_i e_j = -e_j e_i.$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} *(e_2 e_3) &= e_1 e_2 e_3 e_2 e_3 \\ &= -e_1 e_2 e_3 e_3 e_2 \\ &= -e_1 e_2 e_2 \\ &= -e_1 \end{aligned} \quad (51)$$

Da mesma forma:

$$*(e_1 e_3) = e_2, \quad (52)$$

$$* (e_1 e_2) = -e_3. \quad (53)$$

Para uma melhor assimilação vamos considerar dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} = a_x \hat{e}_1 + a_y \hat{e}_2 + a_z \hat{e}_3; \quad (54)$$

$$\vec{b} = b_x \hat{e}_1 + b_y \hat{e}_2 + b_z \hat{e}_3. \quad (55)$$

Agora vamos calcular o dual do produto de Grassman $* \vec{b} \wedge \vec{a}$.

$$* \vec{b} \wedge \vec{a} = (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3) [(b_x \hat{e}_1 + b_y \hat{e}_2 + b_z \hat{e}_3) \wedge (a_x \hat{e}_1 + a_y \hat{e}_2 + a_z \hat{e}_3)] \quad (56)$$

Aplicando a propriedade distributiva nos fatores que estão entre colchetes e sabendo que $\hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0$ e $\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = -\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i$, a expressão (56) pode ser reescrita:

$$* \vec{b} \wedge \vec{a} = (\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3) [(b_x a_y - b_y a_x) \hat{e}_1 \hat{e}_2 + (b_x a_z - b_z a_x) \hat{e}_1 \hat{e}_3 + (b_y a_z - b_z a_y) \hat{e}_2 \hat{e}_3] \quad (57)$$

Obtendo o dual dos bivectores unitários que multiplica cada componente do bivector $\vec{b} \wedge \vec{a}$:

$$(\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3) \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -\hat{e}_3 \quad (58)$$

$$(\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3) \hat{e}_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_2$$

$$(\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3) \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1$$

Podemos, finalmente, reescrever:

$$* \vec{b} \wedge \vec{a} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{e}_1 + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{e}_2 + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{e}_3 \quad (60)$$

Observa-se na equação acima que a partir de um bivector, utilizando o operador Hodge, obtemos um vetor.

Dessa forma, fica fácil verificar que, de acordo com Silva(2010):

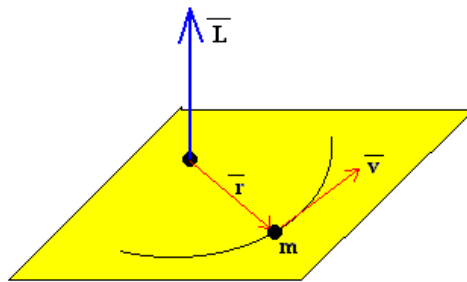
$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv * \vec{b} \wedge \vec{a} \equiv *^{-1} \vec{a} \wedge \vec{b}. \quad (61)$$

CAPÍTULO 4: O MOMENTO ANGULAR

Os conceitos sobre o produto vetorial geralmente começam nos cursos fundamentais de Física, especificamente nos conteúdos sobre Dinâmica de Rotação e Eletromagnetismo. São nos conceitos de torque e momento angular que esse produto é apresentado aos alunos. Em nosso trabalho, será abordado apenas o Momento Angular. Nessa direção, utilizaremos as álgebras de Gibbs – Heaviside e Clifford na determinação das propriedades do vetor Momento Angular.

O Momento Angular é uma grandeza angular vetorial que está relacionada a velocidade do corpo que descreve uma trajetória circular em relação a um ponto central, como vemos na figura abaixo:

Figura 19 Corpo em trajetória circular



Fonte: http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/teoria/A_Franco/solido/teoria/teoria.htm

Observando a figura 11 o Momento angular é representado pelo vetor $\vec{L}$, perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade instantânea da partícula de massa m e $\vec{r}$ é o raio da trajetória descrita pela referida partícula. O vetor $\vec{L}$, de acordo com a Álgebra de Gibbs, é dado pelo seguinte produto vetorial:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (62)$$

Onde m é um escalar, e, também é possível expressar essa grandeza da seguinte forma, em que $\vec{p} = m\vec{v}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (63)$$

O módulo é obtido pela seguinte expressão:

$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}| \sin \theta \quad (64)$$

Que representa a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{p}$, que formam entre si um ângulo θ . A direção de $\vec{L}$ é perpendicular ao paralelogramo formado por $\vec{r}$ e $\vec{p}$ e o sentido é obtido pela regra da mão direita.

Em ambos os casos, a Álgebra de Gibbs aponta que o momento que age sobre a partícula é perpendicular ao raio e ao momento linear associado à referida partícula. Nesse contexto, o momento angular é uma grandeza cujo sentido é dado pela regra da mão direita.

Entretanto, a regra da mão direita é uma regra de memorização e, portanto, convencional. É possível demonstrar que o módulo do Momento Angular é dado por $|\vec{L}| = |\vec{p} \wedge \vec{r}|$. Também é possível provar que a direção dessa grandeza é sempre ortogonal ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{p}$. Todavia ela não pode ser representada pelo bivetor resultante desse produto, uma vez que o momento $\vec{L}$ é uma grandeza univectorial. Porém demonstra-se que esse vetor é o dual do bivetor gerado a partir da representação, no espaço euclidiano tridimensional, das coordenadas retangulares de $\vec{r}$ e $\vec{p}$:

$$\vec{p} = p_1 \hat{e}_1 + p_2 \hat{e}_2 + p_3 \hat{e}_3 \quad (65)$$

$$\vec{r} = r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 + r_3 \hat{e}_3 \quad (66)$$

$$* = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \quad (67)$$

$$\vec{L} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 [(p_1 \hat{e}_1 + p_2 \hat{e}_2 + p_3 \hat{e}_3) \wedge (r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 + r_3 \hat{e}_3)] \quad (68)$$

Resolvendo o produto de Grassmann entre colchetes:

$$\vec{L} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 [(p_1 r_2 - p_2 r_1) \hat{e}_1 \hat{e}_2 + (p_1 r_3 - p_3 r_1) \hat{e}_1 \hat{e}_3 + (p_2 r_3 - p_3 r_2) \hat{e}_2 \hat{e}_3] \quad (69)$$

Aplicando o produto de Clifford (ou produto geométrico) que esta na equação (58) entre os versores do sistema e os versores das componentes do bivetor formado por $\vec{p}$ e $\vec{r}$, obtemos:

$$\vec{L} = (p_3 r_2 - p_2 r_3) \hat{e}_1 + (p_1 r_3 - p_3 r_1) \hat{e}_2 + (p_2 r_1 - p_1 r_2) \hat{e}_3 \quad (70)$$

Assim:

$$\vec{r} \times \vec{p} \equiv * \vec{p} \wedge \vec{r} \equiv *^{-1} \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (71)$$

Esse resultado foi obtido partindo de um bivector, ou seja, o resultado acima é o dual, com isso não precisamos usar a regra da mão direita para encontrar o sentido do momento angular, devido esse resultado ser o dual, ele é um objeto geométrico com as mesmas características do bivector, sendo que terá o mesmo sentido dele.

4.1 Aplicação

Nessa seção, será proposto um problema simples de momento angular que será resolvido pelos formalismos de Gibbs – Heaviside e Clifford.

“Considere uma partícula que se move com velocidade constante, sobre um plano horizontal, segundo uma trajetória circular de raio $r = 20\text{cm}$ no sentido anti-horário. Em qualquer instante t o momento linear $\vec{p}$ da partícula, tangente à trajetória, tem módulo igual a $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Obtenha as propriedades (módulo, direção e sentido) do vetor momento angular $\vec{L}$ em relação ao centro da trajetória circular descrita pela partícula.”

Pelo formalismo de Gibbs:

Dados do problema:

$$r = 20 \text{ cm} \rightarrow r = 0,2\text{m}$$

$$p = 4\text{kg.m/s}$$

O módulo de $\vec{L}$ é obtido através da área do paralelogramo formado por $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

Assim:

$$L = r.p \sin\theta$$

Como $\vec{p}$ é tangente à trajetória, ele será perpendicular à r em qualquer instante t . logo $\theta = 90^\circ$.

$$\text{Assim: } L = 0,2\text{m} . 4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin 90^\circ \rightarrow L = 0,8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Direção: ortogonal ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

Sentido: de acordo com a regra da mão direita, para cima

Pelo formalismo de Clifford:

$$\vec{L} = * (\vec{p} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{L} = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 (p \hat{e}_2 \wedge r \hat{e}_1)$$

$$\vec{L} = p \cdot r \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 (\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1)$$

$$\vec{L} = p \cdot r \hat{e}_3$$

$$\vec{L} = 0,2m \cdot 4 \, kg \frac{m}{s} \hat{e}_3$$

$$\vec{L} = 0,8 \frac{m^2}{s} \hat{e}_3$$

Quando resolvemos esse exercício pelo formalismo de Clifford obtemos, o modulo, direção e sentido sem utilizar artifícios mnemônicos como a regra da mão direita.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do trabalho possibilitou uma análise dos aspectos históricos e matemáticos referentes a Álgebra de Clifford e a Álgebra de Gibbs-Heaviside, que nos permitiu elencar as inconsistências presentes na álgebra vetorial, e mostrar que esses fatos não ocorrem na álgebra geométrica e ainda falar sobre sua abrangência quando comparada com a álgebra utilizada atualmente nos cursos de graduação na área de exatas.

As álgebras geométrica e vetorial tiveram origem dos mesmos trabalhos no caso os quaternions de Hamilton e os objetos geométricos de Grassmann, porém as duas seguiram linhas diferentes, a álgebra de Gibbs-Heaviside é uma generalização desses trabalhos, já a álgebra de Clifford aproveitou na íntegra os trabalhos deles .

Com auxílio das descobertas de Grassmann e Hamilton a álgebra geométrica resolve o problema sobre o sentido do vetor resultante no produto vetorial de Gibbs, pois nela o sentido do vetor é dado pela regra da mão direita, na álgebra de Clifford o produto entre dois vetores gera um bivector, e o sentido do bivector é horário ou anti-horário e sua direção é a mesma do plano suporte do bivector.

Direcionamos o formalismo de Clifford para a dinâmica de rotação para a obtenção do vetor momento angular. No formalismo de Gibbs esse vetor é obtido pelo produto vetorial (uma adaptação do produto de Grassmann) entre a posição da partícula em relação a um ponto central entre o vetor momento linear associado à velocidade dessa partícula, o sentido é dado pela regra da mão direita e a direção é perpendicular ao plano formado pelos vetores que o originaram.

Na álgebra de Clifford o momento angular é dado de pelo produto externo ou produto de Grassmann entre os vetores posição da partícula e o momento linear, o resultado desse produto gera um bivector, com módulo igual a área formada pelo paralelogramo, sentido horário ou anti-horário e a direção é a mesma do plano suporte dele. Então temos um problema, pois o resultado é um bivector, e o momento angular é um vetor, isso é resolvido com o conceito de dualidade, é o processo que determina o dual de um objeto geométrico que é outro objeto geométrico com o mesmo número de componentes.

Por ser um formalismo tão abrangente para sua época de descoberta, se pareceu uma álgebra bastante complexa, e como para os problemas existentes a álgebra de Gibbs-Heaviside servia e era bem mais simples, ela foi deixada de lado.

Assim, o texto é finalizado com um sentimento de entusiasmo por parte do autor, pois se observou o quão magnífica é a álgebra de Clifford,. Portanto deixa-se a proposto que seja ao menos falado dos aspectos históricos e filosóficos referentes a álgebra Vetorial na sala de aula, para que os alunos sejam motivados a buscar e assim dar continuidade na disseminação desse formalismo e ainda para futuros trabalhos mostrem a alunos do ensino superior a Álgebra geométrica e sua gama de aplicações.

REFERENCIAS

ANGOTTI, J.A.P.; BASTOS, F.P.; MION, R.A. **Educação em física**: discutindo ciência, tecnologia e sociedade. Revista Ciência e Educação. Bauru, v.7, n.1, p.183-197, 2001.

AUSUBEL, David P. **Aquisição e Retenção do Conhecimento**: uma perspectiva cognitiva. Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Editora Plátano, 2003.

AUSUBEL, David Paul, Novak, Joseph e Hanesian, Helen. **Psicologia Educacional**, Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

Borges, Keeyne. **Álgebra geométrica aplicada na Física**. 2004. 39. Monografia. Universidade Federal de Uberlândia- Faculdade de Física.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura– **Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. PCN+ - Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**, 2002. Disponível em<http://www.sbfisica.org.br/arquivos/PCN_FIS.pdf>. Acesso em 10 de maio de 2017.

HESTENES, David. **New Foundations for Classical Mechanics**. London: Kluwer Academic Publishers, 2nd Edition, 1999. Space-Time Algebra, New York: Gordon & Breach, 1989.

HESTENES, David. **Spacetime Physics with Geometric Algebra**, Am. J. Phys. 71 (7), 691-714 2003.

KARAN, RICARDO e PIETROCOLA, MAURICIO. **Discussão Das Relações Entre Matemática e Física No Ensino De Relatividade Restrita**: Um Estudo De Caso. Encontro Nacional de Pesquisa em Ciencias. Florianopolis, 2009.

MACHADO, Kleber Daum. **Análise Vetorial em Física**. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/analise-vetorial-em-fisica-kleber-daum-machado-pdf-a21851.html>> (acesso em 09/2017).

MENON, M. J. **Sobre as origens das definições produtos escalar e vetorial**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2305 (2009), Brasil.

SILVA, HUMBERTO JOSÉ GAMA DA. **A Álgebra de Clifford** : Uma aplicação no conceito de Força Magnética. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

SUTER, Jaap. **GeometricAlgebra Primer**. Disponível em < [http:// www.jaapsuter.com](http://www.jaapsuter.com) > (Acesso em 08/2017).

THIBES, RONALDO. **Álgebra Linear E Mecânica Quântica**. V Bienal da SBM Sociedade Brasileira de Matemática UFPB - Universidade Federal da Paraíba 18 a 22 de outubro de 2010.

VAZ, Jr., A. **Álgebra Geométrica do Espaço Tempo e Teoria da Relatividade**. Revista Brasileira de Ensino de Física, 22, 234 (1997).

VIEIRA, Ricardo Soares. **Tópicos de Álgebra Geométrica**. Disponível em: <http://www.geocities.ws/rickrsv/teorias_arquivos/topicos.pdf> Acesso em :25/09/2017.

WINNER, L. La ballena y el reactor. GEDISA Editorial, 1987.